

Eidg. Institut für Reaktorforschung
Würenlingen 1966
Hausdruckerei

Zur analytischen Lösung der energieabhängigen
Neutronen - Transportgleichung in S_N - Formulierung

INAUGURALDISSERTATION

der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bern

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

HENRI BEUCHAT
von Soulce BE

Von der philosophisch - naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Grund des Gutachtens von Herrn Prof. Dr. W. Winkler
und auf Antrag von Herrn Prof. Dr. J. Geiss angenommen.

Der Dekan:

Bern, den 7. Juli 1966

gez. Prof. Dr. W. Nabholz



Digitized by the Internet Archive
in 2026



Eidg. Institut für Reaktorforschung
Würenlingen 1966

ZUR ANALYTISCHEN LOESUNG DER ENERGIEABHAENGIGEN
NEUTRONEN-TRANSPORTGLEICHUNG IN S_N -FORMULIERUNG

INAUGURALDISSERTATION

der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bern

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

HENRI BEUCHAT

von Soulce BE

Von der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Grund des Gutachtens von Herrn Prof. Dr. W. Winkler
und auf Antrag von Herrn Prof. Dr. J. Geiss angenommen.

Der Dekan:

Bern, den 7. Juli 1966

gez. Prof. Dr. W. Nabholz

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	3
1.1.	Allgemeine Formulierung des Problems	4
1.2.	Vereinfachende physikalische Annahmen	4
1.3.	Beschreibung der wichtigsten Kernprozesse	6
1.4.	Definitionen	7
1.5.	Die Neutronen-Transportgleichung	12
1.6.	Der Multigruppen-Formalismus	16
2.	Bekannte Lösungen der Transportgleichung	19
3.	Vorteile der analytischen Lösungsmethode gegenüber der numerischen	22
4.	Zusammenfassung der Arbeitshypothesen	24
4.1.	Die klassische S_N -Methode	25
4.2.	Die gewöhnlichen Differentialgleichungen des S_N -Problems	28
5.	Die Notwendigkeit eines neuen analytischen Ansatzes	30
6.	Die Lie-Reihen-Methode	35
6.1.	Historisches	35
6.2.	Zur Theorie der Lie-Reihen	35
7.	Anwendung der Lie-Reihen auf das S_N -Problem	38
7.1.	Vorläufige Betrachtungen	38
7.2.	Der Gröbner-Operator des S_N -Systems	41
7.3.	Die Lösung der S_N -Differentialgleichungen mit Lie-Reihen	42
7.4.	Erörterungen zur analytischen Fortsetzung der Lösung im Ursprung	43
7.5.	Grundgedanken beim Suchen der Lösung um $r = 0$	44
8.	Die Vakuumsgleichungen und deren Lösung	46
8.1.	Die Exponenten der Vakuumslösung	47

9.	Die Lösung der S_4 -Differentialgleichungen	50
9.1.	Die Vakuumslösung	51
9.2.	Die Vakuumslösung im Ursprung entwickelt	52
9.3.	Die allgemeine Lösung im Ursprung entwickelt und deren Konvergenzverhalten	53
9.4.	Die allgemeine Lösung ausserhalb des Ursprungs entwickelt (mit Konvergenzbetrachtung)	61
10.	Die Lösung der S_N -Differentialgleichungen an der Stelle $r = 0^N$	63
10.1.	Vorgehen zur konkreten Bestimmung einer Lösungsangabe mit Randbedingungen	66
10.2.	Konvergenzverhalten der Lösung	70
11.	Schlussbetrachtungen	71
12.	Anhänge	
I	Relationen zwischen Streuung im Labor- und Schwerpunktsystem	73
II	Entwicklung des elastischen Transferterms Berechnung des elastischen Transferwirkungsquerschnittes	75 76
III	Berechnung der S_N -Quadraturkoeffizienten	81
IV	Die Gewichtskoeffizienten zur Bestimmung des Skalarflusses und des Nettostromes	82
V	Berechnung der Koeffizienten des S_N -Differentialgleichungssystems	83
13.	Literaturverzeichnis	85
14.	Verdankungen	89

1. Einleitung

Die Kenntnis der Verteilung von Neutronen in heterogenen Medien, welche Neutronen streuen, absorbieren oder multiplizieren, ist sowohl in theoretischer wie in experimenteller Hinsicht von erheblichem Interesse für die Planung von Kernreaktoren. Um diese Information zu erhalten, stehen grundsätzlich drei Wege offen, nämlich die Durchführung eines Experimentes, die Simulation des Verhaltens der Neutronen mit dem statistischen Verfahren der Monte-Carlo-Methode, oder die Lösung der Neutronentransportgleichung. Alle diese Methoden haben in der Reaktortheorie ihren typischen Anwendungsbereich und ihre Begrenzung in der Genauigkeit der Aussage.

Der vorliegenden Arbeit liegt die Neutronentransportgleichung zugrunde, wobei die Integro-Differentialgleichung des Problems unter allgemeineren Voraussetzungen als bisher gelöst wird, und das Schwergewicht auf möglichst praktisch ausführbaren rekursiven Berechnungsmethoden fusst.

Die allgemeinsten bis jetzt bekannten Lösungsmethoden von praktischem Wert sind die S_n -Formulierungen des Problems. Sie verzichten völlig auf die Darstellung durch analytische Ausdrücke und approximieren die Verteilungsfunktionen direkt mit Differenzenmethoden und andern numerischen Näherungsverfahren.

Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch, die rein numerische Methode teilweise durch analytische Lösungsverfahren zu ersetzen, welche entgegen den numerischen Verfahren eine beliebige, kontrollierbare Genauigkeit bei annähernd gleichem Aufwand gewährleisten.

Der leitende Gedanke ist darin zu sehen, dass eine kompaktere Darstellung möglich ist und daher die in der Praxis oft bereits erreichten Grenzen der Berechnungsmöglichkeiten weiter gezogen werden können.

1.1. Allgemeine Formulierung des Problems

Die Neutronen-Transporttheorie (NT) beschäftigt sich mit der Migration der Neutronen durch materielle Medien. Diese Migration ist von vielen zufälligen Ereignissen begleitet, nämlich die Kollisionen mit den Bestandteilen der Materie. Zum Studium der NT muss man daher zunächst diese Gesetze kennen und dann das statistische Problem lösen, das sich bei der Behandlung einer grossen Zahl von Kollisionen dieses Typs stellt, welche Zufallscharakter aufweisen. Das Problem benötigt daher zur Formulierung Erkenntnisse aus den Gebieten der Kernphysik, der Quantenmechanik und der statistischen Mechanik. Diese Erkenntnisse dienen auch dazu, vereinfachende Annahmen treffen zu können, wo überall dies möglich ist.

1.2. Vereinfachende physikalische Annahmen

Das Problem, die Verteilung der Neutronen im Phasenraum der Koordinaten und Impulse [1] zu bestimmen, geschieht unter verschiedenen sinnvollen Annahmen. Diese Vereinfachungen gehören verschiedenen Sachgebieten an, die jetzt kurz der Reihe nach durchgesehen werden sollen.

Das statistische Problem der NT wird dadurch vereinfacht, dass man sich für so grosse Anzahlen von Neutronen interessiert, dass zur Beschreibung der Migration nur deren mittleres Verhalten von Bedeutung ist. Man kann daher von Fluktuationen um diesen Mittelwert völlig absehen und den wahrscheinlichsten Zustand betrachten. Dies führt zu folgender Aussage:

A Es genügt zur Beschreibung im Phasenraum die Angabe der wahrscheinlichsten Zahl von Neutronen im Phasenvolumenelement.

Eine weitere, wichtige Voraussetzung, die in der NT gemacht wird, besteht darin, dass man die Kollisionen von Neutronen unter sich vernachlässigt. Dies ist statthaft unter der Voraussetzung, dass die Neutronendichte verschwindend wird im Vergleich zur Dichte der Materie, mit welcher die Neutronen kollidieren. Selbst wenn gewisse leere Zonen vorkommen, ist

die Neutronendichte so gering, dass die mittlere freie Weglänge der Neutronen sehr gross ist gegenüber den Linearausdehnungen der Vakuumszonen. Dies führt zu folgender Vereinfachung:

B Die Neutronen in den materiellen Medien werden nicht zum Medium selber gezählt.

Dies hat als sehr wichtige Folge, dass die Gleichungen, welche den Neutronentransport beschreiben, linear werden und daher weitaus besser lösbar sind als es zum Beispiel die Teilchenbewegung in Gasen und Plasmen [25] sind.

Das Energie-Intervall der kinetischen Energie der Neutronen, das in der NT von Bedeutung ist, reicht grössenordnungsmässig von der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon (Emissionsenergie bei Kernprozessen) bis zur kinetischen Energie von Neutronen, welche im thermischen Gleichgewicht mit der umgebenden Materie sind. Da die kinetische Energie der Neutronen klein ist verglichen mit der Ruheenergie der Neutronen, trifft man folgende Annahme:

C Die Mechanik, die zur Behandlung der Neutronentransportprobleme verwendet wird, ist nichtrelativistisch.

Die weitaus wichtigste Wechselwirkung der Neutronen mit der Materie besteht in solchen mit Atomkernen, da das Neutron sehr schwach ionisierend wirkt gegenüber andern geladenen [20] Elementarteilchen. Man vereinbart daher:

D Nur die Wechselwirkungen mit den Atomkernen werden in Betracht gezogen.

Die Materiewellenlänge des Neutrons ist im Vergleich zu den atomaren Dimensionen klein (und nur im thermischen Energiebereich mit diesen vergleichbar), nicht aber mit den Kerndimensionen. Vernachlässigt man daher Interferenzeffekte im (relativ engen) thermischen Bereich, so kann man vereinbaren:

E Zur Beschreibung des Migrationsphänomens darf man die klassische Mechanik benützen, vorausgesetzt, dass die Kollisionen mit Targetkernen selber mit Hilfe der Quantenmechanik beschrieben werden.

1.3. Beschreibung der wichtigsten Kernprozesse

Es sind hauptsächlich fünf Arten von Wechselwirkungen, welche in der NT energetisch möglich werden [41].

1.3.1. Elastische Streuung

Eine elastische Streuung findet statt, wenn im System Neutron-Kern Energie und Impuls erhalten bleiben. Zwei Arten von Streuung treten auf, einerseits die sog. Potentialstreuung, andererseits die Compound-elastische Streuung, welche beide interferieren können [21]. Wird ein Zwischenkern gebildet, so sind ein- und austretendes Neutron nicht unbedingt dieselben.

1.3.2. Strahlungseinfang

Bei diesem Kernprozess wird das Neutron vom Zielkern verschluckt. Ein Compound-Kern wird gebildet, der dann vom angeregten Zustand wieder in den Grundzustand zurückkehren kann. Erwähnenswert ist ausser der Reaktion (n, γ) auch die Photoneutronen-Produktion (γ, n) , welche aber so selten ist, dass sie in den folgenden Ausführungen vernachlässigt werden kann [22].

1.3.3. Inelastische Streuung

Bei dieser Reaktion wird das Neutron ebenfalls vom Targetkern absorbiert. Die kinetische Energie des emittierten Neutrons ist jedoch geringer als es die Gesetze der klassischen Mechanik fordern würden, wenn die Massen unverändert bleiben. Der daher im angeregten Zustand zurückgebliebene Kern fällt durch Emission von γ -Strahlung (oder auch durch innere Konversion) wieder in den Grundzustand zurück.

1.3.4. Spaltung

Dieser stark exotherme Vorgang wird von der Emission von meh-

reren Neutronen begleitet, welche aus Fragmenten verdampfen. Einige Neutronen können dies aber erst tun, nachdem eine β -Emission stattgefunden hat. Da der β -Prozess den Gesetzen der schwachen Wechselwirkung unterworfen ist, geschieht dies mit merklicher Verzögerung. In den folgenden Ausführungen werden solche Effekte von verzögerten Neutronen vernachlässigt. Wegen ihres seltenen Auftretens werden ebenfalls alle spontanen Spaltungen vernachlässigt. Der Spaltungsprozess ist es, welcher die energieliefernden Kettenreaktionen möglich macht dadurch, dass mehrere Neutronen frei werden. Erwähnenswert ist ein weiterer Kernprozess, der ebenfalls die Neutronenzahl nach der Kollision verändert, obschon er ganz anderer Natur ist als die Spaltung. Es ist dies der $(n,2n)$ -Prozess, der aber relativ selten ist. Bei einigen Systemen muss dessen Effekt jedoch miteinbezogen werden.

1.3.5. Kernumwandlung und weitere Kernprozesse

Unter diese Kategorie fallen alle Prozesse, welche von der Emission eines geladenen Teilchens begleitet sind, also beispielsweise (n,p) - oder n,α -Prozesse. Wenn sie überhaupt energetisch möglich sind, so kommen sie meist selten vor, so dass man sie im allgemeinen vernachlässigen kann. Ihr Beitrag zum Einfangsphänomen kann in der NT zum Strahlungseinfang hinzugerechnet werden. Diese Kernreaktionen werden meistens umgekehrt dazu verwendet, um einem System Neutronen zuzuführen, da sie, zwar endotherm, auch in der andern Richtung durchführbar sind, falls man nur genügend intensive α -Strahler und hochbeschleunigte Protonenstrahlen zu erzeugen weiss.

1.4. Definitionen

Bezüglich eines Koordinatensystems möge ein Punkt durch den Vektor $\vec{r}$ charakterisiert werden (Raumkoordinaten). Ein weiteres Koordinatensystem möge zur Festlegung der Geschwindigkeiten $\vec{v}$ dienen (Impulskoordinaten). Der Zustand eines frei sich bewegendes Neutrons zur Zeit t soll dann vollständig charak-

terisiert sein durch die Angabe der beiden Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{v}$. Um die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{v}$ möge man sich (infinitesimale) Volumenelemente d^3r und d^3v denken. Es folgen jetzt einige immer wiederkehrende Grundbegriffe der NT.

1.4.1. Die differentielle Neutronendichte

Diese ist so definiert, dass deren Produkt mit den Volumenelementen d^3r und d^3v

$$n(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v$$

zur Zeit t die wahrscheinlichste Zahl Neutronen angibt, deren Koordinaten- und Geschwindigkeitsvektoren im Volumenelement d^3r , bzw. d^3v ihre Enden haben.

1.4.2. Der Geschwindigkeits-Einheitsvektor

Führt man den Geschwindigkeitsbetrag $v = |\vec{v}|$ ein, so kann man den Einheitsvektor $\vec{\Omega}$ mit Hilfe der Relation $\vec{v} = v\vec{\Omega}$ definieren.

1.4.3. Der Vektorflux

Als Vektorflux bezeichnet man die Grösse $\phi(\vec{r}, \vec{v}, t)$, welche sich definiert gemäss $\phi(\vec{r}, \vec{v}, t) = vn(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Dessen Produkt mit dem Phasenvolumenelement d^3v gibt die wahrscheinliche Zahl Neutronen an, welche pro Zeiteinheit mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eine Einheitsfläche senkrecht zu $\vec{v}$ durchsetzt.

1.4.4. Der Skalarflux

Dieser ist definitionsgemäss $\Phi(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \phi(\vec{r}, \vec{v}, t) d^2\Omega$ und ergibt, multipliziert mit dem Volumenelement dv , die mittlere Zahl Neutronen an, welche zur Zeit t pro Zeiteinheit die Einheitsfläche mit der Geschwindigkeit v durchsetzen.

1.4.5. Die Lethargie

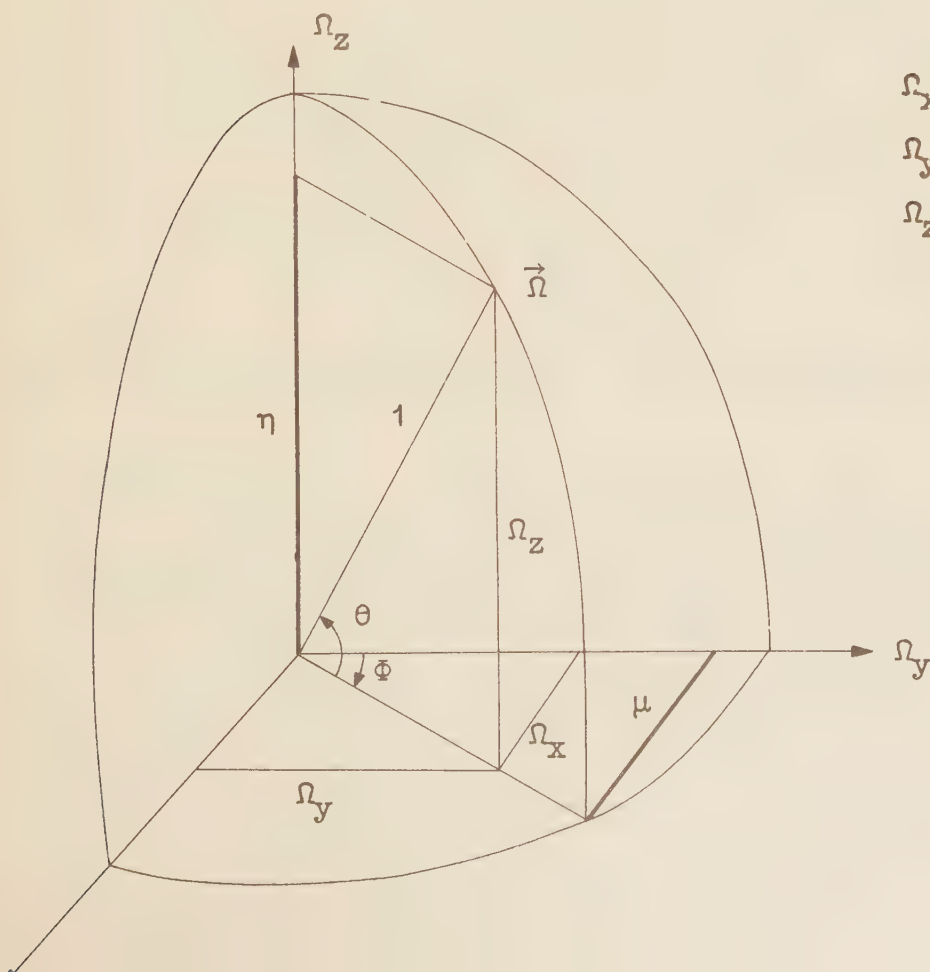
Die kinetische Energie eines Neutrons der Geschwindigkeit v möge mit $E = \frac{1}{2} mv^2$ bezeichnet werden, wobei m die Masse des Neutrons sei. Man bezeichnet als Lethargie eines Neutrons die Grösse $u = \ln \frac{E_0}{E}$, wobei E_0 eine fest gewählte Bezugsenergie darstellt.

1.4.6. Die Komponenten des Richtungseinheitsvektors

Wenn man mit v_x, v_y, v_z in einem kartesischen Koordinatensystem die Komponenten von $\vec{v}$ bezeichnet, so sind dadurch auch etwa die drei Komponenten des Einheitsvektors $\vec{\Omega}$ vermöge

$$v\Omega_x = v_x, \quad v\Omega_y = v_y, \quad v\Omega_z = v_z$$

definiert, da $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ gilt. Statt dieser drei durch $\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2 \equiv 1$ miteinander verknüpften Komponenten wählt man üblicherweise zur Beschreibung zwei Winkel θ und Φ mit den Bereichen $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$, $0 \leq \Phi \leq 2\pi$.



$$\Omega_x = \cos\theta\cos\Phi$$

$$\Omega_y = \cos\theta\sin\Phi$$

$$\Omega_z = \sin\theta$$

Falls Probleme auftreten, welche bezüglich der $\Omega_x \Omega_y$ -Ebene spiegelsymmetrisch sind, so kann man mit Vorteil die beiden Richtungskosinusse η und μ einführen, für welche gilt:

$$\eta = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right), \quad \mu = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \Phi \right),$$

welche also die Bereiche $-1 \leq \eta \leq +1$, $-1 \leq \mu \leq +1$ umfassen. Das Raumwinkelement $d^2\Omega$ wird dann geschrieben als $d^2\Omega = \sin\theta d\theta d\Phi$ oder $d^2\Omega = d\eta \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}$.

1.4.7. Ueber häufig verwendete Koordinatensysteme

In der Transporttheorie sind zwei Koordinatensysteme sehr gebräuchlich und den praktischen Problemen am besten angepasst, nämlich das rechtwinklige und das zylindrische.

1.4.7.1. Rechtwinklige Koordinaten

Die rechtwinkligen Koordinaten von $\vec{r}$ seien (x, y, z) . Dann ist der Gradientenoperator ∇ gegeben durch die Komponenten $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ und der Operator $\vec{\Omega} \cdot \nabla$ wird $\cos\theta \cos\Phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \sin\Phi \frac{\partial}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial z}$. Das Koordinatensystem von $\vec{\Omega}$ ist als achsenparallel zum Koordinatensystem $\vec{r}$ angenommen. Statt dreidimensionale Probleme treten oft auch zwei- und eindimensionale auf. Der Operator $\vec{\Omega} \cdot \nabla$ lautet dann:

$$\cos\Phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\Phi \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{bzw.} \quad \cos\theta \frac{\partial}{\partial z}.$$

Die Raumwinkelemente der zwei- und eindimensionalen Probleme sind dann

$$d^2\Omega = 2d\Phi, \quad d^2\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta.$$

Statt des letzteren verwendet man häufig μ und schreibt dann

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla = \mu \frac{\partial}{\partial x}, \quad d^2\Omega = 2\pi d\mu.$$

1.4.7.2. Zylindrische Koordinaten

Die Koordinaten des Punktes $\vec{r}$ (rechtwinklige Komponenten) sind gegeben durch $(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi, z)$, während für den Gradientenvektor ∇ gilt

$$\left(\cos \psi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \psi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi}, \sin \psi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \psi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Der Differentialoperator $\vec{\Omega} \cdot \nabla$ wird dann zu

$$\cos \theta \left[\cos(\psi - \Phi) \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin(\psi - \Phi)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \right] + \sin \theta \frac{\partial}{\partial z}.$$

Es gibt wichtige einfachere Koordinatensysteme, welche aus diesem gewonnen werden können.

Bei rotationssymmetrischen Problemen erhält man speziell als Operatorin zwei Dimensionen

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla = \sqrt{1 - \eta^2} \left[\mu \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1 - \mu^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] + \eta \frac{\partial}{\partial z},$$

wobei noch

$$d^2 \Omega = d\eta \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

gilt.

Ein weiteres zweidimensionales System ist gegeben durch

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla = \sqrt{1 - \eta^2} \left[\cos(\psi - \Phi) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sin(\psi - \Phi)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \right], \quad d^2 \Omega = d\eta d\Phi.$$

Zwei häufig verwendete eindimensionale Systeme sind durch

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla = \sqrt{1 - \eta^2} \left[\mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right], \quad d^2 \Omega = d\eta \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}},$$

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla = \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad d^2 \Omega = 2\pi d\mu,$$

definiert.

Diese beiden Systeme werden für die folgenden Ausführungen in Abschnitt 4 von grösster Wichtigkeit, da bei vielen Problemen die Rotationssymmetrie und z-Unabhängigkeit als annähernd erfüllt vorausgesetzt werden können. Letzteres System ist für die Beschreibung von sphärisch symmetrischen Problemen geeignet.

1.5. Die Neutronen-Transportgleichung

Diese bekannte Integro-Differentialgleichung ist es, welche die Migration der Neutronen völlig allgemein zu beschreiben gestattet. Sie setzt sich aus fünf Termen zusammen.

1.5.1. Variation der Neutronenzahl im Volumenelement

$$\frac{\partial n}{\partial t} d^3r dv d^2\Omega.$$

1.5.2. Bilanz der Ein- und Austritte von Neutronen im Volumen
element $\vec{v} \cdot \nabla n d^3r dv d^2\Omega$. ∇ ist der Gradientenoperator.

1.5.3. Neutronenverluste durch Kollisionen im Volumenelement

Bezeichnet man mit $\sigma(v)$ den totalen Wirkungsquerschnitt der Targetkerne für Neutronen, mit N die Anzahl Targetkerne pro Volumeneinheit, so beträgt die Anzahl Kollisionen während der Zeit dt im Volumenelement $N\sigma(v) n(\vec{r}, \vec{v}, t) v dt d^3r dv d^2\Omega$. Jede Kollision eliminiert ein Neutron aus dem Phasenraumelement, sei es durch Einfang, Spaltung, Streuung oder $(n, 2n)$ -Prozesse, welche man von denjenigen abzieht, welche ins Phasenelement reemittiert werden. Diese Anzahl ist jedoch von zweiter Ordnung klein und kann daher vernachlässigt werden.

1.5.4. Neutronengewinne durch Kollision im Volumenelement

Die Anzahl Kollisionen im Volumenelement $dv' d^2\Omega'$ beträgt gemäss 1.5.3

$$N\sigma(v') n(\vec{r}, \vec{v}, t) v' dt d^3r dv' d^2\Omega'.$$

Man möge weiter die Wahrscheinlichkeitsdichte, damit ein Neutron nach einer Kollision durch einen Kernprozess von $dv' d^2\Omega'$ nach $dv d^2\Omega$ gelangt, mit $f(\vec{v}' \rightarrow \vec{v})$ bezeichnen. Diese Transferwahrscheinlichkeitsdichte setzt sich zusammen aus den Beiträgen

aus elastischer und inelastischer Streuung, aus Spaltungsbeiträgen und solchen von $(n,2n)$ -Prozessen. Summiert man über alle möglichen Geschwindigkeiten, so erhält man als Gesamtbeitrag

$$dv d^2\Omega d^3r dt \int v' n(\vec{r}, \vec{v}', t) N\sigma(v') f(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}) dv' d^2\Omega' .$$

1.5.5. Externe Neutronenquellen

Im materiellen Medium können durch (α, n) - oder (p, n) -Prozesse Neutronen erzeugt werden. Solche Quellen werden üblicherweise unter dem Sammelbegriff externe Quellen zusammengefasst, da sie als unabhängig von den Neutronen im Medium gelten. Der Neutronenzuwachs verursacht durch äussere Quellen beträgt daher

$$S(\vec{r}, \vec{v}, t) dv d^2\Omega d^3r dt ,$$

wobei S die Quellstärke der Neutronen darstellt. Fasst man Gewinn-Terme auf der rechten Seite, Verlust-Terme auf der linken Seite zusammen, so erhält man die als Boltzmanngleichung bekannte Beziehung

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla n + N\sigma v n = \int N\sigma(v') f(v' \vec{\Omega}' \rightarrow v \vec{\Omega}) v' n(\vec{r}, \vec{v}', t) dv' d^2\Omega' + S(\vec{r}, \vec{v}, t) .$$

Sie wird meistens für den Vektorflux ϕ angeschrieben und lautet in dieser Form

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \phi + N\sigma \phi = \int N\sigma(v') f(v' \vec{\Omega}' \rightarrow v \vec{\Omega}) \phi(\vec{r}, \vec{v}', t) dv' d^2\Omega' + S .$$

1.5.6. Die Transferwahrscheinlichkeitsdichte

Man expliziert die Transferwahrscheinlichkeitsdichte in vier Terme, welche die Spaltung, inelastische Streuung, $(n,2n)$ -Prozesse und die elastische Streuung berücksichtigen.

1.5.6.1. Transfer durch Spaltung

Die Spaltneutronen werden mit einem vorgegebenen Spaltspektrum

$\chi(v)$ emittiert, das auf $\int_0^{v_m} \chi(v) dv = 1$ normiert ist und von der Geschwindigkeit des einfallenden Neutrons v' unabhängig ist. Wenn man weiter voraussetzt, dass die $\nu(v')$ pro Spaltung im Mittel freiwerdenden Neutronen isotrop im Laborsystem [23] emittiert werden, so folgt für den Transfer durch Spaltung

$$f_f = \frac{\sigma_f(v')}{\sigma(v')} \nu(v') \chi(v).$$

$\frac{\sigma_f(v')}{\sigma(v')}$ ist die Spaltwahrscheinlichkeit pro Kollision.

1.5.6.2. Inelastischer Transfer

Es wird vorausgesetzt, dass die Emission der Neutronen isotrop im Schwerpunktsystem [24] stattfindet. Da die schweren Kerne hauptsächlich inelastische Streuungen hervorrufen, so kann man auch ohne grossen Fehler Isotropie der Emission im Laborsystem annehmen. Man hat daher für den inelastischen Transfer

$$f_{in} = \frac{\sigma_i(v')}{\sigma(v')} \frac{\eta_{in}(v', v)}{4\pi}.$$

η ist die Transferwahrscheinlichkeitsdichte von v' nach v .

1.5.6.3. (n,2n)-Transfer

Analog zum inelastischen Transfer kann man schreiben

$$f_{2n} = \frac{\sigma_{2n}(v')}{\sigma(v')} 2 \frac{\eta_{2n}(v', v)}{4\pi},$$

da jedes der beiden Neutronen als unkorreliert mit denselben Transferwahrscheinlichkeitsdichten emittiert angesehen werden darf.

1.5.6.4. Elastischer Transfer

Der elastische Transfer kann im allgemeinen nicht mehr als isotrop im Schwerpunktsystem angesehen werden. Einesteils weisen schwere Kerne markante Anisotropie auf, was eine gleichartige im Laborsystem bedingt, andernteils [26] ist bei leichten Ker-

nen zwar die Winkelverteilung des emittierten Neutrons eher isotrop im Schwerpunktsystem. Die Verteilung im Laborsystem hingegen kann nicht mehr als isotrop angesehen werden. Weiter ist der Streuwinkel θ_L mit der Emissionsgeschwindigkeit gekoppelt (siehe Anhang I)

$$v = v' \frac{\cos \theta_L + \sqrt{A^2 - \sin^2 \theta_L}}{A + 1},$$

wobei v' die Geschwindigkeit des einfallenden Neutrons und A das Massenverhältnis Targetkern zu Neutron bedeutet. Hierbei wird, wie übrigens bei allen andern Kernprozessen, vorausgesetzt, dass die thermische Bewegung der Targetkerne gegenüber der Geschwindigkeit der Neutronen vernachlässigt werden darf. Man vernachlässigt daher bewusst alle Effekte, welche damit zusammenhängen, wie der thermische Dopplereffekt (der auch eine Verbreiterung von Einfangresonanzen verursacht), oder wie die Aufwärtsstreuung (Energiegewinn des Neutrons durch Streuung an einem thermisch schnellbewegten Targetkern). Es werden weiter alle Effekte vernachlässigt, die auftreten, wenn die kinetische Energie der Neutronen von der Grössenordnung der Molekül-Bindungsenergien werden. Diese Effekte sind in [27], [28], [29] eingehend behandelt worden.

Als endgültige Form der Boltzmanngleichung erhält man daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi + N \sigma \varphi = & \int \varphi(\vec{r}, \vec{v}', t) \frac{N}{4\pi} \left[\sigma_f(v') v(v') \chi(v) + \right. \\ & \left. + \sigma_{1n}(v') \eta_{1n}(v' \Rightarrow v) + \sigma_{2n}(v') 2\eta_{2n}(v' \Rightarrow v) \right] dv' d^2 \Omega' + \\ & + \int \varphi(\vec{r}, \vec{v}', t) N \sigma_{el}(\theta_L, v') \delta(v-w) dv' d^2 \Omega' + S, \\ w = v' \frac{\cos \theta_L + \sqrt{A^2 - \sin^2 \theta_L}}{A + 1}, \\ \cos \theta_L = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'. \end{aligned}$$

1.6. Der Multigruppenformalismus

Das Prinzip der Methode besteht darin, das Energie-Intervall in G Intervalle aufzuteilen, und die folgende Annahme zu machen: Es soll das Energiespektrum des Neutronenflusses weder von Raum, Zeit, noch Flugrichtung der Neutronen in jedem Lethargie-Intervall abhängen, also gültig sein,

$$\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, u, t) = \varphi_g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) g_g(u) \quad \text{für} \quad u_{g-1} \leq u \leq u_g .$$

Die Funktionen $g_g(u)$ sollen derart normiert sein, dass

$$\int_{u_{g-1}}^{u_g} g_g(u) du = 1$$

gilt. Analog sollen sich externe Quellen in derselben Form schreiben lassen

$$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, u, t) = S_g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) h_g(u) \quad \text{für} \quad u_{g-1} \leq u \leq u_g ,$$

mit

$$\int_{u_{g-1}}^{u_g} h_g(u) du = 1 .$$

Wenn man die Boltzmanngleichung mit du multipliziert und über das Intervall $\{u_{g-1}, u_g\}$ integriert, erhält man folgende Form der Multigruppen-Transportgleichung:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi_g + N \sigma_g \varphi_g = S_g + \sum_{g'=1}^G N [\nu_{g'} \sigma_{g'}^f \chi_g + \sigma^i(g' \rightarrow g) + \sigma^{2n}(g' \rightarrow g)]$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \varphi_{g'}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d^2 \Omega' + \int_{u_{g-1}}^{u_g} du \int_{u-\gamma}^u du' \int \varphi N \sigma^e(u') f_e(u-u', \mu_L) d^2 \Omega' .$$

Dabei sind folgende Größen definiert worden:

$$\int_{u_{g-1}}^{u_g} \frac{g_g(u)}{v} du = \frac{1}{v_g}$$

die mittlere Geschwindigkeit,

$$\int_{u_{g-1}}^u \sigma(u) g_g(u) du = \sigma_g$$

der totale Wirkungsquerschnitt ,

$$\int_{u_{g-1}}^u \sigma^f(u) g_g(u) du = \sigma_g^f$$

der Spaltungs-Wirkungsquerschnitt ,

$$\int_{u_{g-1}}^u v(u) \sigma^f(u) g_g(u) du = v_g \sigma_g^f$$

die mittlere Zahl Spaltneutronen ,

$$\int_{u_{g-1}}^u \chi(u) du = \chi_g$$

das Spaltspektrum ,

$$\int_{u_{g-1}}^u \eta^i(u' \rightarrow u) du = \eta_g^i(u')$$

die inelastische Transferwahrscheinlichkeitsdichte nach g ,

$$\int_{u_{g-1}}^{u_{g'}} g_{g'}(u) \sigma^i(u) \eta_g^i(u) du = \sigma^i(g' \rightarrow g)$$

inelastischer Transfer-WQ ,

$$\int_{u_{g-1}}^u \sigma^e(u) g_g(u) du = \sigma_g^e$$

elastischer Streu-WQ ,

$$\int_{u_{g-1}}^u \sigma^i(u) g_g(u) du = \sigma_g^i$$

inelastischer Streu-WQ ,

$$\eta_{gg'}^i = \sigma^i(g' \rightarrow g) / \sigma_g^i$$

inelastische Transfermatrix

$$\text{nach } g \left(\sum_{g=1}^G \eta_{gg'}^i = 1 \right) ,$$

$$\int_{u_{g-1}}^u \eta^{2n}(u' \rightarrow u) du = \eta_g^{2n}(u')$$

($n, 2n$)-Transferwahrscheinlichkeitsdichte ,

$$\int_{u_{g-1}}^u \eta_g^{2n}(u) g_{g'}(u) \sigma^{2n}(u) du = \sigma^{2n}(g' \rightarrow g) \quad (n, 2n)\text{-Transfer-WQ ,}$$

$$\sigma_g^c = \sigma_g - (\sigma_g^i + \sigma_g^e + \sigma_g^f + \sigma_g^{2n})$$

Einfangs-WQ .

Wenn die WQ wenig im Innern einer Gruppe variieren, so hängen die mittleren WQ nur schwach vom Neutronenspektrum ab.

Die Berechnung des elastischen Streukerns für zwei Momente $\ell = 0, 1$ ist im Anhang II wiedergegeben. Wegen der Energie-Winkelkorrelation ist es nicht möglich, die Integrationen geschlossen durchzuführen. Man begnügt sich daher mit einer beschränkten Entwicklung des elastischen Streukerns in sphärische Harmonische des Streuwinkels θ .

Die Multigruppen-Boltzmanngleichung mit Berücksichtigung linearer anisotroper elastischer Streuung lautet daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \phi_g + N \sigma_g \phi_g = & \sum_{g'=1}^G N (v_{g'} \sigma_{g'}^f \chi_g + 2 \sigma_{gg'}^{2u} + \sigma_{g'}^i \eta_{gg'}) \phi_{g'} + \\ & + \sum_{g'=1}^G N [\sigma_{gg'}^{s0} \phi_{g'} + 3 \sigma_{gg'}^{s1} \vec{\Omega} \cdot \vec{J}_{g'}] + S_g . \end{aligned}$$

Hierbei sind die Skalarflüsse ϕ_g und die Nettoströme $\vec{J}_g$ gemäss

$$\phi_g = \frac{1}{4\pi} \int \phi_g d^2 \Omega \quad \vec{J}_g = \frac{1}{4\pi} \int \vec{\Omega} \phi_g d^2 \Omega$$

eingeführt worden.

2. Bekannte Lösungen der Transporttheorie

Es sind viele Lösungsmethoden der Neutronen-Transportgleichung bekannt [1], [2], [43], [44], [45]. Diese Lösungsmethoden sind entweder analytisch oder voll numerisch. Analytisch lässt sich die Transportgleichung nur für einige wenige Spezialfälle lösen. Die dabei erforderlichen Einschränkungen bringen es mit sich, dass dann meistens nur ein Aspekt des allgemeinen Problems zum Ausdruck kommt, beispielsweise Lösungen im unendlichen, homogenen Medium, solche für mono-energetische Neutronen (Eingruppentheorie), oder auch solche für niedrige Richtungsapproximationen (Diffusionstheorie). Will man die Transportgleichung unter weniger einschränkenden Voraussetzungen lösen, so ist man auf numerische Verfahren angewiesen; seien es rein numerische Verfahren (Differenzenmethoden) oder solche mit Reihenentwicklungen.

Im folgenden wird etwas näher auf die Richtungsapproximationen eingegangen, da sie am ehesten zusammen mit einer Multi-Energiegruppen-Darstellung ein realistisches Bild der Vorgänge wiedergibt.

Wohl die älteste dieser Methoden ist die von Wick und Chandrasekhar entwickelte Methode der diskreten Ordinaten [46], [47].

Der Neutronenflux $\varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)$ wird in eine diskrete Schar $\varphi_m(\vec{r}, v, t)$ verwandelt, und man schreibt den verschiedenen φ_m Gewichte w_m zu ($\sum^m w_m = 1$). Diese Gewichte werden in der ursprünglichen Problemstellung durch Formeln der numerischen Quadratur (z.B. Gauss'sche Gewichte) geliefert.

Im Zusammenhang mit neuen Lösungsmethoden ist man dann dazu übergegangen [5], die Methode der diskreten Ordinaten zu verallgemeinern (diskrete S_n -Methoden). Diese Methode scheint eines der wichtigsten Hilfsmittel zur numerischen Lösung der Transportgleichung zu sein.

Eine weitere analytische Methode, die starke Verbreitung gefunden hat, ist die Entwicklung der Lösung in sphärische Harmonische. Dieses unter dem Namen P_N -Methode bekannte Verfahren

ist in [37], [38], [9], [10] zuerst entwickelt und beschrieben worden.

Eine Modifikation dieser Methode ist von Yvon vorgeschlagen worden [11], welche als doppelte P_N -Methode bekannt ist. Sie besteht darin, die Transportlösung für die Ein-, bzw. die Austrittsrichtung durch zwei verschiedene Kugelfunktionen darzustellen.

Neuerdings sind Arbeiten erschienen, wo Entwicklungen in orthogonale Polynome angesetzt wurden, welche nicht vom Legendre'schen Typ sind. In [12], [13], [14] sind solche in Tchebycheff-Polynome versucht worden, während in [15], [16] Gegenbauer- und Jacobische Polynome angesetzt wurden. Alle diese Methoden krankten aber daran, dass die Neutronenbilanz nicht erhalten bleibt, obschon auch hier mit Korrekturtermen Abhilfe geschaffen werden kann.

Es ist auch versucht worden, die Yvon-Methode auf mehrere Polynome auszudehnen [17]. Da die Gauss'sche Quadratur ebenfalls auf Legendre-Polynomdarstellung beruht, ist es möglich, unter den Methoden der diskreten Ordinaten eine der P_N -Methode völlig äquivalente Lösung zu finden, so dass sich diese als ein Spezialfall der allgemeinen diskreten Methode behandeln liesse.

Eine weitere, sehr oft angewandte Technik besteht darin, ebenfalls wie in der Methode der diskreten Ordinaten eine Einteilung in verschiedene Richtungen vorzunehmen, jedoch noch (wenigstens in der ersten Formulierung) darüber hinaus anzunehmen, dass sich die Neutronenverteilung linear zwischen den Richtungen ändert [18], [19]. Dieses als S_n -Methode bekannte Verfahren liefert Bilanzgleichungen, welche denjenigen der Wick-Chandrasekhar-Methode ähnlich sind. Darüber hinaus wird üblicherweise diskretisiert, indem zusätzlich der Raum in Zellen unterteilt wird, worin die S_n -Bilanzgleichungen gelten.

Der S_n -Formalismus ist daher seinem Wesen nach ein numerisches Lösungsverfahren, im Gegensatz zu den oben besprochenen P_N -Methoden, welche analytische Lösungen liefern.

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die analytische

Lösung der S_n -Differentialgleichungen. In [30] ist erwähnt, dass die S_n -Methode deswegen auf numerischen Verfahren beruht, weil die analytischen Lösungen viel zu kompliziert seien. Dies ist wahr, im Vergleich mit den üblichen analytischen Methoden, welche sämtliche auf bekannte spezielle Funktionen (Besselfunktionen u.a.) führen. Die S_n -Differentialgleichungen führen auf neue Funktionen, für die es spezieller Methoden bedarf, um sie darzustellen.

3. Vorteile der analytischen Lösungsmethode gegenüber der numerischen Methode

Ein grosser Teil der numerischen Methoden zur Lösung der Transportgleichung (darunter sollen alle Verfahren verstanden werden, welche Lösungen mit Hilfe von endlichen Differenzen bestimmen) ist entwickelt worden, weil mit dem Aufkommen der Rechenhilfsmittel der elektronischen Datenverarbeitung kompliziertere Probleme gelöst werden konnten, welche eine grosse Zahl von elementaren Rechenoperationen erforderten. Dank der erhöhten Rechengeschwindigkeit konnte daher mit annähernd gleichem Zeitaufwand wie bei den analytischen Lösungsmethoden eine Antwort auf das gestellte Problem gefunden werden. Mit der Verfeinerung der Information von kernphysikalischen Daten machte sich die Tendenz zu immer feinerer Unterteilung des Energie- und des Winkelintervalls geltend. Es kommt daher einmal eine Situation, wo dieser Prozess trotz immer grösserer und schnellerer Hilfsmittel der elektronischen Datenverarbeitung nicht mehr möglich sein wird. Dann können rein numerische Methoden unter Umständen nicht mehr kompetitiv sein. Man wird daher trachten müssen, gewisse Diskretisierungen durch analytische Lösungen zu ersetzen, um andern Bedürfnissen, zum Beispiel einer genauen Berechnung eines Neutronenspektrums, eher gerecht zu werden.

Eine teilanalytische Methode hat daher gegenüber einer rein numerischen den Vorteil grösserer Flexibilität. Ein enges Maschengitter wird ersetzt durch analytische Ausdrücke. Dafür können andere verbleibende Diskretisierungen grosszügiger gestaltet werden, zum Beispiel in Energie- und Richtung der Neutronen. Die vielen Maschenpunkte einer räumlichen Darstellung der Neutronenpopulation werden nicht immer von unmittelbarem Interesse sein, so dass also auch da keine wesentliche Einbusse auftritt. Die analytische Lösung gestattet es aber, diese anzugeben, falls sie doch einmal interessant sein sollte und darüber hinaus vermittelt sie die Kenntnis von Integralen über die analytische Lösung (beispielsweise thermi-

sche Nutzfaktoren, relative Aktivierungsraten, Flussdepressionen, Spaltraten und anderes mehr).

Eine weitere Tatsache, welche die analytischen Methoden attraktiv erscheinen lässt, rührt davon her, dass man die Genauigkeit im Gegensatz zu den rein numerischen Methoden kontrollieren kann. Es sind Fälle denkbar, wo auch einmal Fehler sich auswirken könnten (beispielsweise bei differentiellen Effekten) [31]. Die Größenordnung des Fehlers ist bei numerischen Methoden schwierig abzuschätzen, und auch das Problem der Fehlerfortpflanzung in jedem Spezialfall zu untersuchen. Demgegenüber hat die analytische Lösung den Vorteil einer Genauigkeit, die sich beliebig steigern lässt. Mit Hilfe von Entwicklungen kann der Fehler in kontrollierten Grenzen gehalten werden (ein numerisches Verfahren erlaubt nur ungewisse Rückschlüsse bei Änderungen im Punktgitter).

Eine analytische Lösung vermittelt daher dem an konkreten Resultaten interessierten Praktiker eher eine seinen Genauigkeitsanforderungen genügende Lösung, welche allgemein genug ist.

4. Zusammenfassung der angenommenen Arbeitshypothesen

Die vorliegende Arbeit stützt sich auf die allgemein gebräuchliche S_n -Formulierung in ihrer ursprünglichen Form (und nicht etwa auf die später entwickelte diskrete S_n -Methode). Als Voraussetzungen werden gemacht:

Statistischer Art : Grosse Zahlen (viele Neutronen)

Physikalischer Art : Geringe Neutronendichten gegenüber den Materiedichten
Nichtrelativistische Mechanik
Kernwechselwirkungen (mit Quantenmechanik)

Fünf Arten von Wechselwirkungen:

Elastische Streuung (wobei die Bewegung der Targetkerne und die chemischen Molekülbindungseffekte vernachlässigt werden)

Strahlungseinfang

Inelastische Streuung

Spaltung

(n,2n)-Prozesse

Stationäre Probleme (das heisst Weglassen aller reaktordynamischen Effekte, beispielsweise der verzögerten Neutronen)

Geometrischer Art : Rotationssymmetrie
Unendliche Zylindergeometrie (d.h. ein Zylinder, der in axialer Richtung unendlich ausgedehnt ist)

Mathematischer Art : Multigruppenformalismus
(diskrete Geschwindigkeitsintervalle mit Wirkungsquerschnitten, welche mit dem approximativen Neutronenspektrum gewichtet sind)

Zwei Arten von Randbedingungen:

Vakuum-Randbedingung oder

Reflexions-Randbedingung

Es wird also eine diskrete Aufteilung des Impulsraumes beibehalten.

4.1. Die klassische S_n -Methode

Die vereinfachte Grundgleichung des Neutronentransportes lautet in Zylindergeometrie:

$$\sqrt{1-\eta^2} \left[\mu \frac{\partial \phi_g}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \phi_g}{\partial \mu} \right] + N \sigma_g \phi_g = Q_g \quad g = 1, 2, \dots, G$$

$$Q_g = \sum_{g'=1}^G [N \sigma_{gg'}^{s0} + N \nu_{g'} \sigma_g^f \chi_g + 2N \sigma_{gg'}^{2n} + N \sigma_g^i \eta_{gg'}] \phi_{g'} + \sum_{g'=1}^G N \sigma_{gg'}^{s1} J_{g'} \sqrt{1-\eta^2} \mu + S_g.$$

Hierbei sind

$$\phi_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{-1} d\eta \int_{-1}^{-1} \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \phi_g \quad J_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{-1} \sqrt{1-\eta^2} d\eta \int_{-1}^{-1} \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial \phi_g}{\partial \mu} d\mu.$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{array}{lll} \text{bei } r=R \text{ entweder} & \phi(R, \mu) = 0 & \mu < 0 \text{ (Vakuum)} \\ & \text{oder} & \phi(R, \mu) = \phi(R, -\mu) \quad \mu < 0 \text{ (Reflexion)} \\ \text{bei } r=0 \text{ immer} & \phi(0, \mu) = \phi(0, -\mu) & \mu < 0 \text{ (Symmetrie)} \end{array}$$

Unter der Annahme, dass sich $\phi_g(\mu)$ zwischen den Stellen μ_j und μ_{j+1} linear ändert, also

$$\phi = [(\mu - \mu_j) \phi_{j+1} + (\mu_{j+1} - \mu) \phi_j] / (\mu_{j+1} - \mu_j)$$

gilt, kann man den Ausdruck

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}$$

über μ zwischen diesen Stellen integrieren und erhält dann

$$[\alpha_{j+1} \phi'_{j+1} + \beta_{j+1} \phi'_j + \frac{\gamma_{j+1}}{r} (\phi_{j+1} - \phi_j)] \Delta\mu.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= \mu_{j+1} - \mu_j & \alpha_{j+1} &= \frac{1}{6} (2\mu_{j+1} + \mu_j) \\ & & \beta_{j+1} &= \frac{1}{6} (\mu_{j+1} + 2\mu_j) \\ & & \gamma_{j+1} &= (1 - \mu_{j+1} \mu_j) / \Delta\mu - \frac{1}{3} \Delta\mu. \end{aligned}$$

Das Intervall $-1 \leq \mu \leq +1$ wird in $2N$ gleich grosse Intervalle aufgeteilt, also $\Delta\mu = 1/N$. Von dieser Aufteilung her hat die Methode den Namen S_{2n} erhalten.

Man erhält somit

$$\sqrt{1-\eta^2} [\alpha_{j+1} \phi'_{j+1} + \beta_{j+1} \phi'_j + \frac{\gamma_{j+1}}{r} (\phi_{j+1} - \phi_j)] + \frac{1}{2} N \sigma(\phi_{j+1} + \phi_j) = Q_j.$$

Der Energiegruppenindex ist der Einfachheit halber weggelassen worden. Bis auf den Term $\sqrt{1-\eta^2}$ ist dies die Form der S_{2n} Differenzialgleichungen in Kugelgeometrie.

Abgesehen vom Quellterm Q kann man daher die zylindersymmetrischen Probleme auf die kugelsymmetrischen reduzieren, indem man jeweils die Differentialgleichungen löst, welche durch $\sqrt{1-\eta^2} \neq 0$ durchdividiert wurden.

Lediglich die Skalarflüsse und Nettoströme, welche zur Bildung des Quellterms Q verwendet werden, unterscheiden sich in Kugel- und Zylindergeometrie.

In Kugelgeometrie ist

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \phi d\mu \qquad J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu \phi d\mu,$$

in Zylindergeometrie hingegen

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \phi \qquad J = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\eta^2} d\eta \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} d\mu$$

Wenn man die Annahme der Linearität von $\psi(\mu)$ zur Berechnung von Φ und J heranzieht, erhält man daher andere Gewichtungskoeffizienten. Im Zylinderfalle muss man noch zusätzlich eine Integration über η durchführen.

Man hat somit folgende Darstellung für Skalarfluss und Nettostrom in Zylindergeometrie:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^{M+1} a_{\ell}^1 \chi_{\ell} \cdot \frac{\Delta\eta}{3} \\ \chi_{M+1} &= \sum_{\ell=1}^M a_{\ell}^0 \chi_{\ell} \\ J &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^M a_{\ell}^1 \psi_{\ell} \sqrt{1-\eta_{\ell}^2} \cdot \frac{\Delta\eta}{3} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_ℓ^0 und a_ℓ^1 sind im Anhang III für äquidistante η_ℓ -Werte und Quadratur nach Simpson angegeben.

Die χ_ℓ und ψ_ℓ sind gegeben durch

$$\chi = \int_{-1}^{-1} \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \varphi \quad \psi = \int_{-1}^{-1} \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu$$

und lassen sich mit den Voraussetzungen bestimmen. Es wird

$$\chi = \sum_{j=1}^{2N} [\varphi_{j+1} q_j^1 + \varphi_j q_j^2] \quad \psi = \sum_{j=1}^{2N} q_j^3 (\varphi_{j+1} - \varphi_j) .$$

Die Koeffizienten q_j^1 , q_j^2 und q_j^3 sind im Anhang IV angegeben.

Im Kugelfalle gestalten sich die Koeffizienten etwas einfacher. Für die folgenden Ausführungen ist dies jedoch ohne Belang. Die Differentialgleichungen, die man erhält, lauten also im Zylinderfalle:

$$\sqrt{1-\eta_\ell^2} [\alpha_{j+1} \varphi'_{\ell j+1} + \beta_{j+1} \varphi'_{\ell j} + \frac{\gamma_{j+1}}{r} (\varphi_{\ell j+1} - \varphi_{\ell j})] + \frac{1}{2} N \sigma (\varphi_{\ell j+1} + \varphi_{\ell j}) = Q_{j+1}$$

$$Q_{j+1} = N \sigma_0 \Phi + N \sigma_1 \sqrt{1-\eta_\ell^2} \frac{\mu_{j+1} + \mu_j}{2} J + S_{j+1} \quad \ell = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, 2N$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^M (a_\ell^1 + a_{M+1}^1 a_\ell^0) \sum_{j=1}^{2N} [\varphi_{\ell j+1} q_j^1 + \varphi_{\ell j} q_j^2] \cdot \frac{\Delta \eta}{3}$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^M a_\ell^1 \sqrt{1-\eta_\ell^2} \sum_{j=1}^{2N} q_j^3 (\varphi_{\ell j+1} - \varphi_{\ell j}) \cdot \frac{\Delta \eta}{3} .$$

S_{j+1} enthält alle Beiträge der Neutronen, welche durch sonstige Prozesse in die betrachtete Energiegruppe g gelangen. Diesem System von $M \cdot 2N$ Differentialgleichungen für $M(2N+1)$ Funktionen $\varphi_{\ell j}$ werden M weitere Differentialgleichungen hinzugefügt, welche davon herrühren, dass der Wert $\mu = -1$ in die Transportgleichung eingesetzt wird. Ueber die Gründe, welche zu dieser scheinbar willkürlichen Wahl führen, mag [41] konsultiert werden.

$$-\sqrt{1-\eta_\ell^2} \varphi'_{\ell 1} + N \sigma \varphi_{\ell 1} = Q_1$$

$$Q_1 = N \sigma_0 \Phi - N \sigma_1 \sqrt{1-\eta_\ell^2} J + S_1 .$$

4.2. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen des S_n -Problems

Nachdem alle Umformungen des Neutronentransportproblems durchgeführt worden sind, lauten die daraus resultierenden $2N+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 -\varphi_1^{\prime \ell} + N\sigma^{\ell} \varphi_1^{\ell} &= N\sigma_0^{\ell} \Phi - N\sigma_1^{\ell} J + S_1^{\ell} \\
 \alpha_{j+1} \varphi_{j+1}^{\prime \ell} + \beta_{j+1} \varphi_j^{\prime \ell} + \frac{\gamma_{j+1}}{r} (\varphi_{j+1}^{\ell} - \varphi_j^{\ell}) + \frac{1}{2} N\sigma^{\ell} (\varphi_{j+1}^{\ell} + \varphi_j^{\ell}) &= \\
 = N\sigma_0^{\ell} \Phi + \frac{1}{2} (\mu_{j+1} + \mu_j) N\sigma_1^{\ell} J + S_{j+1}^{\ell}, \\
 j = 1, 2, \dots, 2N & \quad \ell = 1, 2, \dots, M.
 \end{aligned}$$

Dabei sind die beiden Richtungskosinusse μ und η in je $2N$, bzw. $2M$ äquidistante Intervalle der Breite $\Delta\mu$, resp. $\Delta\eta$ unterteilt worden, so dass gilt

$$\Delta\mu = 1/N \quad \Delta\eta = 1/M$$

$$\mu_{j+1} = \Delta\mu(-N+j) \quad j = 0, 1, \dots, 1N \quad \eta_{\ell+1} = \Delta\eta \cdot \ell \quad \ell = 0, 1, \dots, M$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j+1} = \frac{1}{6} (2\mu_{j+1} + \mu_j) \quad \beta_{j+1} = \frac{1}{6} (\mu_{j+1} + 2\mu_j) \quad \gamma_{j+1} = \frac{1 - \mu_{j+1}\mu_j}{\Delta\mu} - \\
 - \frac{1}{3} \Delta\mu
 \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, 2N.$$

Die materialabhängigen Grössen sowie die Quellen sind:

$$\sigma_0^{\ell} = \sigma_0 / \sqrt{1 - \eta_{\ell}^2} \quad \sigma_1^{\ell} = \sigma_1 \quad \sigma^{\ell} = \sigma / \sqrt{1 - \eta_{\ell}^2} \quad S_{j\ell} = S_j / \sqrt{1 - \eta_{\ell}^2}.$$

Der Skalarfluss Φ sowie der Nettostrom J lassen sich berechnen aus:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{\Delta\eta}{6\pi} \sum_{\ell=1}^M [a_{\ell}^1 \chi_{\ell} + a_{M+1}^1 a_{\ell}^0 \chi_{\ell}] \\
 J &= \frac{\Delta\eta}{6\pi} \sum_{\ell=1}^M \sqrt{1 - \eta_{\ell}^2} a_{\ell}^1 \psi_{\ell}.
 \end{aligned}$$

Dabei sind die Werte von χ_{ℓ} und ψ_{ℓ} festgelegt durch:

$$\chi_{\ell} = \sum_{j=1}^{2N} [b_j^1 \varphi_{j+1\ell} + b_j^2 \varphi_{j\ell}]$$

$$\psi_{\ell} = \sum_{j=1}^{2N} b_j^0 (\varphi_{j+1\ell} - \varphi_{j\ell}) .$$

Fasst man schliesslich alle materialabhängigen Grössen zusammen unter dem Symbol a_{mk}^{lj} $l, m = 1, 2, \dots, M_j$, $k = 1, 2, \dots, 2N+1$, so kann man dem zu lösenden linearen Differentialgleichungssystem erster Ordnung folgende abkürzende Form geben:

$$-\varphi'_{1\ell} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{2N+1} a_{mk}^{\ell 1} \varphi_{km} + S_{1\ell}$$

$$\alpha_{j+1} \varphi_{j+1\ell} + \beta_{j+1} \varphi_{j\ell} + \frac{\gamma_{j+1}}{r} (\varphi_{j+1\ell} - \varphi_{j\ell}) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{2N+1} a_{mk}^{\ell j+1} \varphi_{km} + S_{j+1\ell}$$

Der übliche Weg zur Integration dieses Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen geht dahin, ein numerisches Verfahren zur Approximation zu verwenden.

Die vorliegende Arbeit stützt sich ebenfalls auf dieses Differentialgleichungssystem. Ein völlig neuer Weg wird aber beschritten, indem rein analytische Methoden zur Lösung beigezogen werden.

Diese Neuerung bezweckt, gewisse Vorteile und Verbesserungen gegenüber dem bisherigen Verfahren zu erreichen.

5. Die Notwendigkeit eines neuen analytischen Ansatzes

Um diese einzusehen, wird das S_2 -Differentialgleichungssystem eingehender untersucht. Dieses Differentialsystem

$$\alpha_1 \frac{d\varphi_1}{dr} + N\sigma \cdot \varphi_1 = N\sigma_0 \Phi - N\sigma_1 J + S_1$$

$$\alpha_2 \frac{d\varphi_2}{dr} + \beta_2 \frac{d\varphi_1}{dr} + \gamma_2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r} + \frac{1}{2} N\sigma(\varphi_2 + \varphi_1) = N\sigma_0 \Phi - \frac{1}{2} N\sigma_1 J + S_2$$

$$\alpha_3 \frac{d\varphi_3}{dr} + \beta_3 \frac{d\varphi_2}{dr} + \gamma_3 \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{r} + \frac{1}{2} N\sigma(\varphi_3 + \varphi_2) = N\sigma_0 \Phi + \frac{1}{2} N\sigma_1 J + S_3$$

mit

$$\alpha_1 = -1$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{6} \quad \beta_2 = -\frac{1}{3} \quad \gamma_2 = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3} \quad \beta_3 = \frac{1}{6} \quad \gamma_3 = \frac{2}{3}$$

kann geschrieben werden als

$$\alpha_1 \varphi_1' = a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 + a_{13} \varphi_3 + b_1$$

$$\alpha_2 \varphi_2' + \beta_2 \varphi_1' + \frac{\gamma_2}{r} (\varphi_2 - \varphi_1) = a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 + a_{23} \varphi_3 + b_2$$

$$\alpha_3 \varphi_3' + \beta_3 \varphi_2' + \frac{\gamma_3}{r} (\varphi_3 - \varphi_2) = a_{31} \varphi_1 + a_{32} \varphi_2 + a_{33} \varphi_3 + b_3$$

Man versucht, es auf eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung zu bringen. Es stellt sich dann heraus, dass die betreffende Differentialgleichung nicht zurückführbar ist auf schon bekannte Typen. Durch Substitution der neuen Variablen und der Abkürzungen

$$\Phi_1 = \varphi_1 \quad c_{11} = a_{11} + a_{12} + a_{13} \quad c_{12} = a_{12} + a_{13} \quad c_{13} = a_{13} \quad \alpha_{11} = \alpha_1 \quad \alpha_{31} = \alpha_3$$

$$\Phi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 \quad c_{21} = a_{21} + a_{22} + a_{23} \quad c_{22} = a_{22} + a_{23} \quad c_{23} = a_{23} \quad \alpha_{21} = \alpha_2 \quad \alpha_{32} = \alpha_3 + \beta_3$$

$$\Phi_3 = \varphi_3 - \varphi_2 \quad c_{31} = a_{31} + a_{32} + a_{33} \quad c_{32} = a_{32} + a_{33} \quad c_{33} = a_{33} \quad \alpha_{22} = \alpha_2 + \beta_2 \quad \alpha_{33} = \alpha_3 + \beta_3$$

findet man als neues System die Gleichungen

$$\alpha_{11} \Phi_1' = \sum_i c_{1i} \Phi_i + b_1 \quad (1)_1$$

$$\alpha_{21} \Phi_2' + \alpha_{21} \Phi_1' + \frac{\gamma_2}{r} \Phi_2 = \sum_i c_{2i} \Phi_i + b_2 \quad (2)_1$$

$$\alpha_{31} \Phi_3' + \alpha_{31} \Phi_2' + \alpha_{33} \Phi_1' + \frac{\gamma_3}{r} \Phi_3 = \sum_i c_{3i} \Phi_i + b_3 \quad (3)_1$$

Aus diesem System eliminiert man nun $\Phi_2 \Phi_3 \Phi_2'$ und Φ_3' mit folgendem Prozess:

1. Schritt:

$$(1)_1 \quad (\Phi_2 \Phi_3) [\Phi_1 \Phi_1'] \quad \text{Differenzieren von (1)}$$

$$(2)_1 \quad (\Phi_2 \Phi_2' \Phi_3) [\Phi_1 \Phi_1']$$

$$(3)_1 \quad (\Phi_2 \Phi_2' \Phi_3 \Phi_3') [\Phi_1]$$

$$(1)_1' \quad (\Phi_2' \Phi_3') [\Phi_1' \Phi_1'']$$

2. Schritt:

$$(2)_2 \quad (\Phi_2' \Phi_3) [\Phi_1 \Phi_1'] \quad \text{Ausrechnen von } \Phi_2 \text{ aus } (1)_1 \text{ und}$$

$$(3)_2 \quad (\Phi_2' \Phi_3 \Phi_3') [\Phi_1 \Phi_1'] \quad \text{Ersetzen in } (2)_1 \text{ und } (3)_1$$

3. Schritt:

$$(3)_3 \quad (\Phi_3 \Phi_3') [\Phi_1 \Phi_1'] \quad \text{Ausrechnen von } \Phi_2' \text{ aus } (2)_2 \text{ und}$$

$$(1)_3' \quad (\Phi_3 \Phi_3') [\Phi_1 \Phi_1' \Phi_1''] \quad \text{Ersetzen in } (3)_2 \text{ und } (1)_1'$$

4. Schritt:

$$(1)_4' \quad (\Phi_3) [\Phi_1 \Phi_1' \Phi_1''] \quad \text{Ausrechnen von } \Phi_3' \text{ aus } (3)_3 \text{ und}$$

$$\text{Ersetzen in } (1)_3'$$

5. Schritt:

$$(1)_5'' \quad (\Phi_3') [\Phi_1 \Phi_1' \Phi_1'' \Phi_1'''] \quad \text{Differenzieren von } (1)_4'$$

6. Schritt:

$$(1)_6'' \quad (\Phi_3) [\Phi_1 \Phi_1' \Phi_1'' \Phi_1'''] \quad \text{Ausrechnen von } \Phi_3' \text{ aus } (3)_3 \text{ und}$$

$$\text{Ersetzen in } (1)_5''$$

7. Schritt:

$$(1)_7'' \quad [\Phi_1 \Phi_1' \Phi_1'' \Phi_1'''] \quad \text{Ausrechnen von } \Phi_3 \text{ aus } (1)_4' \text{ und}$$

$$\text{Ersetzen in } (1)_6''$$

In runden Klammern stehen die zu eliminierenden Unbekannten, in eckigen die verschiedenen Ableitungen der Variablen, nach welcher eliminiert wird.

Man wird so auf eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung in Φ_1 , bzw. ϕ_1 geführt; gelingt es, diese zu faktorisieren, d.h. dessen Differentialoperator in ein Produkt einfacherer Differentialoperatoren zurückzuführen, so ist die Lösung als Superposition der Funktionen zu bilden, welche den einfacheren Differentialoperatoren in der Differentialgleichung genügen. Kann keine solche Faktorisierung gefunden werden, so sind die Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung selber ein neuer Funktionstyp, der durch die betreffende Differentialgleichung charakterisiert wird. Es müssen im Falle des linearen Operators dritter Ordnung L_3 folgende Faktorisierungen in Betracht gezogen werden

$$L_3 \equiv L_2 L_1$$

$$L_3 \equiv L_1 L_2$$

$$L_3 \equiv L_1 L_1' L_1''$$

da jede andere Kombinationsmöglichkeit sich in diese Arten überführen lässt.

Führt man die Eliminationen durch, so erhält man eine Differentialgleichung von folgender Form:

$$B_{32} \Phi_1''' = [B_{31} + B_{32}(A_{33} + P_{11})] \Phi_1'' + [B_{32}(A_{32} + B_{32}A_{12}) - A_{33}(B_{11} + B_{31})] \Phi_1' + [B_{32}(A_{31} + B_{32}A_{11} - B_{11}A_{21}) - B_{31}A_{21}] \Phi_1 + [B_{32}(C_3 + B_{32}C_1 - B_{11}C_2) - B_{31}C_2]$$

Hierbei sind die Abkürzungen

$$A_{11} = \frac{1}{\alpha_{31}} \left\{ -\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{21}} [c_{21} - c_{11}C] + [c_{31} - \frac{c_{32}}{c_{12}} c_{11}] \right\}$$

$$A_{12} = \frac{1}{\alpha_{31}} \left\{ -\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{21}} [-\alpha_{22} + \alpha_{11}C] + [-\alpha_{33} + \frac{c_{32}}{c_{12}} \alpha_{11}] \right\}$$

$$A_{21} = \frac{1}{\alpha_{11}} \left\{ A[c_{21} - c_{11}C] + \frac{c_{13}}{\alpha_{21}} [c_{31} - \frac{c_{32}}{c_{12}} c_{11}] \right\}$$

$$A_{31} = \frac{1}{\alpha_{11}} \left\{ A \left[-\frac{c_{11}}{c_{12}} \frac{\gamma_2}{r^2} \right] \right\}$$

$$A_{32} = A_{21} + \frac{1}{\alpha_{11}} \left\{ A \left[+ \frac{\alpha_{11}}{c_{12}} \frac{\gamma_2}{r^2} \right] \right\}$$

$$A_{33} = \frac{1}{\alpha_{11}} \left\{ c_{11} + A[-\alpha_{22} + \alpha_{11}C] + \frac{c_{13}}{\alpha_{21}} \left[-\alpha_{33} + \frac{c_{32}}{c_{12}} \alpha_{11} \right] \right\}$$

$$B_{11} = \frac{1}{\alpha_{31}} \left\{ -\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{21}} [c_{23} - c_{13}C] + \left[-\frac{c_{32}}{c_{12}} c_{13} + B \right] \right\}$$

$$B_{31} = \frac{1}{\alpha_{11}} \left\{ A \left[-\frac{c_{13}}{c_{12}} \frac{\gamma_2}{r^2} \right] + \left[\frac{c_{13}}{\alpha_{21}} \frac{\gamma_3}{r^2} \right] \right\}$$

$$B_{32} = \frac{1}{\alpha_{11}} \left\{ A[c_{23} - c_{13}C] + \frac{c_{13}}{\alpha_{21}} \left[-\frac{c_{32}}{c_{12}} c_{13} + B \right] \right\}$$

$$C_1 = \frac{1}{\alpha_{31}} \left\{ -\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{21}} [b_2 - b_1C] + \left[-\frac{c_{32}}{c_{12}} b_1 + b_3 \right] \right\}$$

$$C_2 = \frac{1}{\alpha_{11}} \left\{ b'_1 + A[b_2 - b_1C] + \frac{c_{13}}{\alpha_{31}} \left[-\frac{c_{32}}{c_{12}} b_1 + b_3 \right] \right\}$$

$$C_3 = \frac{1}{\alpha_{11}} \left\{ b''_1 + A[b'_2 - b'_1C - \frac{b_1}{c_{12}} \frac{\gamma_2}{r^2}] + \frac{c_{13}}{\alpha_{31}} \left[-\frac{c_{32}}{c_{12}} b'_1 + b'_3 \right] \right\}$$

$$A = \frac{c_{12}}{\alpha_{21}} - \frac{c_{13}}{\alpha_{21}} \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{21}}$$

$$B = c_{33} - \frac{\gamma_3}{r}$$

$$C = \frac{1}{c_{12}} (c_{22} - \frac{\gamma_2}{r})$$

eingeführt worden.

Man erhält schliesslich eine allgemeine Differentialgleichung der Gestalt

$$P_3(r)\Phi_1''' + P_2(r)\Phi_1'' + P_1(r)\Phi_1' + P_0(r)\Phi_1 = Q(r),$$

wobei die Polynome $P(r)$ gegeben sind durch

$$e_{33}r^3 + e_{32}r^2 = P_3(r)$$

$$e_{23}r^3 + e_{22}r^2 + e_{21}r = P_2(r)$$

$$e_{13}r^3 + e_{12}r^2 + e_{11}r + e_{10} = P_1(r)$$

$$e_{03}r^3 + e_{02}r^2 + e_{01}r + e_{00} = P_0(r)$$

Auch die homogene Differentialgleichung $[Q(r) \equiv 0]$ ist in der Literatur nirgends gefunden worden.

Die Korrektheit der Ausführung des Eliminationsverfahrens ist mit Hilfe der neuen Formelsprache ALGAN-I an der ETH mit einer CDC-1604A ausgeprüft worden [32]. Diese Formelsprache gestattet die mechanisierte algebraische Manipulation von Ausdrücken, welche vereinfacht und eingesetzt werden (Mechanisierung der linearen Algebra).

Die Aufstellung der gewöhnlichen Differentialgleichung 5. Ordnung des S_4 -Differentialgleichungssystems ist ebenfalls versucht worden. Der Rechenaufwand überstieg jedoch die Speicherkapazität einer CDC-1604A (mit 32'000 Kernspeicherplätzen). Während das S_2 -Problem noch lediglich die analytische Auflösung eines linearen Systems mit 6 Unbekannten erforderte, ist bei S_4 deren Zahl schon 20. Diese Zahl von Unbekannten wächst für S_{2N} wie $2N(2N+1)$. Von dieser Seite her scheint die analytische Berechnung sehr kompliziert zu werden, da nur schon das Problem, die Differentialgleichung 5. Ordnung von Hand aufzustellen, am Aufwand scheitert und deshalb auf mechanisierter Algebra beruhen muss. Schon die S_2 -Differentialgleichung zeigt keine Faktorisierungsmöglichkeit, wie sich nach umständlichen Rechnungen herausstellte. Die Aussicht, eine solche Differentialgleichung 5. Ordnung allgemein zu faktorisieren, ist sehr gering. Auch wenn sie gelänge, so würden die resultierenden Eigenfunktionen komplexer Eigenwerte fähig sein [33], wenn der S_N -Formalismus auf Mehrgruppengleichungen angewendet wird (wie dies z.B. auch bei den Diffusionsgleichungen der Fall ist [34]).

Diese Tatsachen sprechen alle für das Einschlagen eines andern Weges zur analytischen Lösung der S_N -Gleichungen, der Lösungsmethode mit Hilfe von Lie-Reihen.

6. Die Lie-Reihen-Methode

6.1. Historisches

In neuerer Zeit sind erstmals von S. Lie [36] benutzte Reihen-
ausdrücke der Gestalt

$$e^{tD}z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu}z$$

von W. Gröbner [38], [39], [40] wieder aufgegriffen und zur
Lösung einer Reihe von Problemen verwendet worden. Ein guter
Einblick in die Theorie der Lie-Reihen ist in der Monographie
von Gröbner [35] gegeben. In weiteren Arbeiten [5] werden, statt
den Gröbner-Operator sukzessive anzuwenden, direkt allgemeine
rekursive Vorschriften zur Bestimmung der iterierten Operato-
ren angegeben [3], [4].

Auch auf dem Gebiet der Reaktorphysik hat sich die Lie-Reihen-
Methode bereits bewährt [6], sei es bei der Lösung von Multi-
gruppen-Diffusionsgleichungen [7] oder der P_3 -Transportnähe-
rung [8]; auch auf die Behandlung der nichtlinearen Reaktor-
dynamik hat sich diese Methode mit Erfolg anwenden lassen [49].

6.2. Zur Theorie der Lie-Reihen

Es sei D ein linearer Differentialoperator (der Gröbner-Opera-
tor)

$$D = \sum_{j=1}^n \vartheta_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$$

mit den holomorphen Funktionen $\vartheta_j(z)$ der komplexen Variablen
 $z_1, z_2, \dots, z_n$. Eine Funktion $f(z)$ dieser Variablen nennen wir
an einer Stelle holomorph, wenn sie dort in eine (absolut kon-
vergente) reguläre Potenzreihe entwickelt werden kann oder,
was dasselbe bedeutet, an dieser Stelle beliebig oft differen-
zierbar ist.

Sind alle $\vartheta_j(z)$ und $f(z)$ in der Umgebung derselben Stelle ho-

lomorphic, dann kann man den Operator auf diese Funktion anwenden:

$$Df(z) = \sum_{l=1}^n v_l(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z_l} .$$

Das Ergebnis ist nach bekannten Sätzen der Funktionentheorie wieder eine an dieser Stelle holomorphe Funktion. Man erhält bei mehrmaliger Anwendung des Gröbner-Operators auf $f(z)$ immer wieder eine holomorphe Funktion und schreibt dann:

$$D^0 f(z) \equiv f(z) \quad Df(z), D^2 f(z), \dots \quad D^\nu f(z) = D[D^{\nu-1} f(z)] .$$

Mit Hilfe des Gröbner-Operators kann man eine Lie-Reihe mit symbolischer Operatorschreibweise definieren

$$\sum_{\nu=0}^n \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu f(z) = e^{tD} f(z) .$$

t ist darin eine neue komplexe Variable, die von den z_i unabhängig ist. Der einfache, jedoch etwas lange Beweis der Konvergenz der Lie-Reihen ist in [35] ausführlich gegeben.

Von besonderer Wichtigkeit für das hier zu behandelnde S_N -Problem sind die folgendermassen erklärten Lie-Reihen:

$$y_i = e^{tD} z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) ,$$

die man speziell für $f(z) = z_i$ erhält.

In einem gewissen Bereich der Variablen $z_1, z_2, \dots, z_n$, in welchem die Koeffizienten $v_l(z)$ des Gröbner-Operators holomorph sind, und für ein $|t| < T$ stellen diese Reihen holomorphe Funktionen von $t, z_1, z_2, \dots, z_n$ dar. Für $t = 0$ sind die Anfangswerte $y_i(0)$ gerade die z_i .

Für den Gröbner-Operator gelten die Rechengesetze

$$D(f_1 + f_2) = Df_1 + Df_2 \quad D(f_1 \cdot f_2) = f_1 Df_2 + f_2 Df_1$$

und daher

$$D^\nu(f_1 f_2) = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \binom{\nu}{\alpha} [D^\alpha f_1] [D^{\nu-\alpha} f_2] .$$

Man erhält daher analoge Regeln für die Lie-Reihen

$$e^{tD}(f_1+f_2) = e^{tD}f_1 + e^{tD}f_2 \quad e^{tD}(f_1 f_2) = (e^{tD}f_1)(e^{tD}f_2) \quad \text{da}$$

$$\begin{aligned} e^{tD}(f_1 f_2) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu(f_1 f_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{\alpha=0}^{\nu} \binom{\nu}{\alpha} (D^\alpha f_1)(D^{\nu-\alpha} f_2) = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha+\beta}}{\alpha! \beta!} (D^\alpha f_1)(D^\beta f_2) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{t^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f_1 \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{t^\beta}{\beta!} D^\beta f_2 = (e^{tD}f_1)(e^{tD}f_2), \end{aligned}$$

W. Z. Z. W.

In [35] ist der Beweis angeführt für den wichtigen Vertauschungssatz, der besagt, dass das Funktionszeichen mit dem Reihensymbol vertauscht werden darf,

$$F(e^{tD}z) = e^{tD}F(z) .$$

Die speziellen Lie-Reihen $y_i = e^{tD}z_i$ liefern nach der Differentiation nach t die Relationen

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = D e^{tD} z_i = e^{tD} D z_i = e^{tD} \vartheta_i(z) = \vartheta_i(e^{tD}z) = \vartheta_i(y) .$$

Diese Lie-Reihen sind Lösungen des regulären und autonomen Differentialgleichungssystems erster Ordnung

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = \vartheta_i(y) .$$

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ist nach dem Satz von Peano mit Hilfe des Picard-Lindelöf-Verfahrens gewährleistet, so dass also auch die Umkehrung gilt, dass wenn ein Differentialgleichungssystem von obigem Typ gegeben ist, die angeschriebenen Lie-Reihen die Lösungen darstellen.

Man kann leicht zeigen [35], dass sich ein nichtautonomes System durch Erweiterung mit neuen zusätzlichen Variablen auf ein autonomes System zurückführen lässt.

7. Anwendung der Lie-Reihen auf das S_N -Problem

7.1. Vorläufige Betrachtungen

Das System ist

$$\alpha_j \varphi'_j + \beta_j \varphi'_{j-1} + \frac{\gamma_j}{r} (\varphi_j - \varphi_{j-1}) = \sum_{k=1}^{2N+1} a_k^j \varphi_k + S_j \quad j = 1, 2, \dots, 2N+1.$$

Im obigen S_N -Problem sind alle Indices, welche sich auf die Energiegruppe g und auf die Koordinate η_l beziehen, aus Einfachheitsgründen weggelassen.

Das entsprechende homogene System ist für $r \neq 0$ regulär, aber nichtautonom. Wie man aus [35] weiss, genügt es, um das System autonom zu machen, eine neue Variable $\varphi_0 = r$ einzuführen und das System durch die Differentialgleichung

$$\varphi'_0 = 1$$

zu ergänzen, wobei man als Anfangsbedingung $\varphi_0(0) = 0$ zu stellen hat. Die allgemeine Theorie der Lie-Reihen sichert daher im Regularitätsgebiet $r \neq 0$ eine in einem bestimmten Radius konvergente Lösung.

Wenn man daher eine Matrix M definiert gemäss

$$\begin{pmatrix} -1 & C & 0 & \dots \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & \\ \vdots & & & \alpha_{2N} & 0 \\ & & & \beta_{2N+1} & \alpha_{2N+1} \end{pmatrix} = M$$

die weiteren Matrizen Γ und A

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\gamma_2 & \gamma_2 & 0 & \\ 0 & -\gamma_3 & \gamma_3 & \\ \vdots & & & \gamma_{2N} & 0 \\ & & & -\gamma_{2N+1} & \gamma_{2N+1} \end{pmatrix} = \Gamma \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & a_{2N+1 \ 2N+1} \end{pmatrix} = A$$

so schreibt man das Differentialgleichungssystem in Matrizenform

$$M\vec{\phi}' + \frac{1}{r} \Gamma\vec{\phi} = A\vec{\phi} + \vec{\sigma}.$$

Beispiel: S_4 -Matrix M

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_5 & \alpha_5 \end{pmatrix} = M.$$

Die inverse Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + \frac{\beta_2}{\alpha_2} & + \frac{1}{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 \\ - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\beta_3}{\alpha_3} & - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\beta_3}{\alpha_3} & + \frac{1}{\alpha_3} & 0 & 0 \\ + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\beta_3}{\alpha_3} \frac{\beta_4}{\alpha_4} & + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\beta_3}{\alpha_3} \frac{\beta_4}{\alpha_4} & - \frac{1}{\alpha_3} \frac{\beta_4}{\alpha_4} & + \frac{1}{\alpha_4} & 0 \\ - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{\beta_3}{\alpha_3} \frac{\beta_4}{\alpha_4} \frac{\beta_5}{\alpha_5} & - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\beta_3}{\alpha_3} \frac{\beta_4}{\alpha_4} \frac{\beta_5}{\alpha_5} & + \frac{1}{\alpha_3} \frac{\beta_4}{\alpha_4} \frac{\beta_5}{\alpha_5} & - \frac{1}{\alpha_4} \frac{\beta_5}{\alpha_5} & + \frac{1}{\alpha_5} \end{pmatrix} = M^{-1},$$

wie man leicht durch Ausmultiplizieren bestätigen kann.

Die Matrixelemente M_{ij} (i = Zeile, j = Spalte), $i, j = 1, 2, \dots, 2N+1$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} M_{ij} &= 0 & i \neq j, j+1 \\ M_{jj} &= \alpha_j & j > 1 \\ M_{j-1,j} &= \beta_j & j > 0 \\ M_{11} &= -1 \end{aligned}$$

Die Matrixelemente M_{ij}^{-1} lassen sich dagegen berechnen aus

$$\begin{aligned} M_{11}^{-1} &= -1 \\ M_{jj}^{-1} &= \frac{1}{\alpha_j} & j > 1 \\ M_{ij}^{-1} &= 0 & i < j \\ M_{ij}^{-1} &= M_{jj}^{-1} \prod_{k=j+1}^i \left(-\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right) & i > j \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise wird das System nach Multiplikation mit M^{-1}

$$\vec{\phi}' + \frac{1}{r} M^{-1} F \vec{\phi} = M^{-1} A \vec{\phi} + M^{-1} \vec{\sigma} .$$

Das obige System ist noch nicht in der Normalform, in welcher der Gröbner-Operator angeschrieben werden kann. Der Quellvektor $\vec{\sigma}$ setzt sich bei einer G-Gruppenrechnung additiv aus einem Anteil $\vec{\sigma}_{\text{int}}$ und $\vec{\sigma}_{\text{ext}}$ zusammen. Dabei sind die Definitionsgleichungen für $\vec{\sigma}_{\text{int}}$, die Beiträge aus andern Energiegruppen, bereits angeschrieben, hingegen muss $\vec{\sigma}_{\text{ext}}$ noch durch ein Differentialgleichungssystem definiert werden.

Es sei

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \mathcal{L}(\vec{\sigma}^{(i)}, r) ,$$

wobei $\mathcal{L}$ eine Linearkombination der $\vec{\sigma}^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ ist. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}_1 &= \vec{\sigma}^{(0)} = \vec{\sigma} \\ \vec{\zeta}_2 &= \vec{\sigma}^{(1)} = \vec{\sigma}' \\ \vec{\zeta}_n &= \vec{\sigma}^{(n-1)} \end{aligned}$$

erhält man das System

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}'_k &= \vec{\zeta}_{k+1} & k &= 1, 2, \dots, n-1 \\ \vec{\zeta}'_n &= \mathcal{L}(\vec{\zeta}_{k+1}, r) . \end{aligned}$$

Das S_N -System kann nun folgendermassen geschrieben werden, wenn man die Matrizen B und C sinngemäss definiert:

$$\begin{pmatrix} \vec{\phi}' \\ \vec{\zeta}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1}A - \frac{1}{r} M^{-1}F & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\phi} \\ \vec{\zeta} \end{pmatrix}$$

Hiermit ist die Gröbnersche Normalform erreicht (d.h. alle v_i sind bekannt) und der Gröbner-Operator kann hingeschrieben werden.

Das homogene System ist dann nichtautonom und kann wie früher auf ein entsprechendes reduziert werden. Man kann dann wie in

[35] für das nichtautonome System einen Gröbner-Operator finden.

7.2. Der Gröbner-Operator des S_N -Systems

Mit Hilfe der Transformationen des letzten Kapitels gelingt es, das homogene S_N -System auf die Form

$$\frac{d\varphi_i}{dr} = \sum_{k=1}^{2N+1} \left[a_{jk} + \frac{b_{jk}}{r} \right] \varphi_k$$

zu bringen. Die Funktionen $\vartheta_j(\varphi, r)$ sind daher

$$\vartheta_j(\varphi, r) = \sum_{k=1}^{2N+1} \left(a_{jk} + \frac{b_{jk}}{r} \right) \varphi_k$$

und der Gröbner-Operator zunächst [35]

$$D = \sum_{k=1}^{2N+1} \vartheta_k(\varphi, r) \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \quad \varphi_0 = r \quad \frac{d\varphi_0}{dr} = 1 .$$

Wenden wir diesen aber auf φ_j an, so folgt

$$D\varphi_j = \sum_{k=1}^{2N+1} \vartheta_k(\varphi, r) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \varphi_0} ,$$

und da $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \varphi_k} = \delta_{jk}$ das Kronecker-Symbol wird, daher auch

$$D\varphi_j = \vartheta_j(\varphi, r).$$

Man folgert dann, dass der Gröbner-Operator in diesem Falle ganz einfach

$$D = \frac{d}{dr}$$

der Differentialoperator ist. Diese Beziehung kann ganz allgemein hergeleitet werden und besagt, dass D so zu bilden ist, dass

- das Differentialgleichungssystem erfüllt ist
- und dazu noch die Randbedingungen.

Dann ist die Lie-Reihe äquivalent der Taylorreihe, welche dann obige Bedingungen erfüllt. Man erhält daher als Lie-Reihe eine Taylorentwicklung

$$\varphi_j(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(r-r_0)^\nu}{\nu!} \varphi_j^{(\nu)}(r_0) = e^{(r-r_0)D} \varphi_j(r_0).$$

Die Anwendung der Lie-Reihen-Methode liefert daher eine analytische Lösung in Form einer konvergenten Reihenentwicklung, welche für $|r-r_0| < r_0$ absolut konvergiert.

Das Verfahren der Lösung durch Lie-Reihen gipfelt darin, algebraische Rekursionen für die so neu definierten Funktionen aufzusuchen. Es bleibt allerdings darauf hinzuweisen, dass die Lie-Reihen ihre Gültigkeit im Holomorph-Gebiet haben und dass es deshalb umständlicher neuer Methoden bedarf (welche speziell diesem Typ von Differentialgleichungen angepasst sind), um die Lösung im singulären Punkt $r_0 = 0$ zu entwickeln. Es kann aber vorwegnehmend gesagt werden, dass die Entwicklungen im Ursprung gegenüber den Lie-Reihen den Vorzug der absoluten Konvergenz für alle $r > 0$ haben. Es muss jedoch mit allem Nachdruck darauf hingewiesen werden, dass dies nicht zum Trugschluss berechtigt, diese Reihen könnten für beliebige Argumente mit Rechenautomaten berechnet werden.

7.3. Die Lösung der S_N -Differentialgleichungen mit Lie-Reihen

Das Verfahren, das angewendet wird, besteht, wie bereits erwähnt, in der rekursiven Berechnung von Taylorkoeffizienten, welche einen Spezialfall der Lie-Reihen darstellen, wobei für diese die üblichen Restgliedabschätzungen gelten.

Das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen wird mit der Konvention

$$\begin{array}{lll} \alpha_j = A(j) & \beta_j = B(j) & \gamma_j = C(j) \\ A(1) = -1 & B(1) = 0 & C(1) = 0 \end{array}$$

geschrieben und lautet dann

$$A(j)\varphi'_{j\ell} + B(j)\varphi'_{j-1\ell} + \frac{C(j)}{r} [\varphi_{j\ell} - \varphi_{j-1\ell}] = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{2N+1} a_{km}^{j\ell} \varphi_{km} + S_{j\ell}.$$

Multipliziert man diese Differentialgleichung mit r und differenziert sie dann n -mal nach r , so erhält man, da

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^n [rf(r)] = rf^{(n)}(r) + nf^{(n-1)}(r)$$

gilt,

$$\begin{aligned} r[A(j)\varphi_{j\ell}^{(n+1)} + B(j)\varphi_{j-1\ell}^{(n+1)}] + [(nA(j) + C(j))\varphi_{j\ell}^{(n)} + (nB(j) - C(j))\varphi_{j-1\ell}^{(n)}] = \\ = r \left[\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{2N+1} a_{km}^{j\ell} \varphi_{km}^{(n)} + S_{j\ell}^{(n)} \right] + n \left[\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{2N+1} a_{km}^{j\ell} \varphi_{km}^{(n-1)} + S_{j\ell}^{(n-1)} \right] \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, 2N+1$$

$$\ell = 1, 2, \dots, M$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Diese Rekursionen für höhere Ableitungen der Funktionen $\varphi_{j\ell}(r_0)$ sind nach der höchsten $\varphi_{j\ell}^{(n+1)}(r_0)$ aufzulösen. Dies ist immer möglich (da $A(j) \neq 0$ ist), wenn $r_0 \neq 0$ gefordert wird. Es müssen lediglich die Anfangswerte bei $\varphi_{j\ell}^{(0)}(r_0)$ bekannt sein. Dann ist eine Reihenentwicklung der Funktionen möglich

$$\varphi_{j\ell}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r-r_0)^n}{n!} \varphi_{j\ell}^{(n)}(r_0).$$

7.4. Erörterungen zur Entwicklung um die Stelle $r = 0$

Die allgemeine Entwicklung für $r_0 \neq 0$ hat zur Voraussetzung, dass $|r-r_0| < r$ ist. Für den Fall $r_0 \rightarrow 0$ ist in dieser Lösung nur derjenige Anteil enthalten, der bei $r_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Führt man den Uebergang $r_0 \rightarrow 0$ in den Rekursionen aus, so ergibt sich, dass die Anzahl der Integrationskonstanten dieser speziellen Lösung kleiner ist als diejenige, welche man aus der Endlichkeit der Lösung fordern müsste.

Es folgt daher, dass in diesem Spezialfall noch weitere Lösungen existieren müssen, welche nicht durch Potenzreihen darstellbar sind.

Die Suche nach diesen Funktionen bildet das Kernstück dieser Arbeit und wird im Kapitel 8 und Kapitel 9 eingehend besprochen.

Entwickelt man die Funktionen um die singuläre Stelle $r = 0$, so erhält man eine abgekürzte Rekursion, welche statt wie vorher Ableitungen der Ordnung $n + 1$, n , $n - 1$, jetzt nur noch solche der Ordnung n , $n-1$ enthält.

Löst man wie früher nach der höchsten Ableitung $\varphi_{j,l}^{(n)}$ auf, so gibt es jedesmal mindestens ein grösstes Wertepaar n, j , für welches der Ausdruck $nA(j) + C(j)$ verschwindet (siehe Kapitel 8, Abschnitt 8.1). Um nicht widersprüchliche Rekursionen zu erhalten, muss man dann notwendigerweise alle vorhergehenden Ableitungen Null setzen. Die Lösungen, die man erhält, sind dann wohl noch reguläre Potenzreihen, welche aber als Teil der allgemeinen Lösung keine physikalisch sinnvollen Lösungen mehr sind, denn der Neutronenfluss $\varphi_{j,l}(0)$ verschwindet im Ursprung. Auch kommen im Grenzfall verschwindender Materiedichte nicht dieselben Lösungen heraus, die man erhält, wenn man direkt die Vakuumsgleichungen löst (siehe Kapitel 9, Abschnitte 9.2 und 9.3). Die Vakuumslösungen sind nämlich nicht mehr regulär im Ursprung.

Diese Schwierigkeit kompliziert auf unerwartete Weise das Problem und es bedarf daher etlicher mathematischer Klünge, bis man eine Lösung findet, welche allen Anforderungen gerecht wird. In [42] sind Lösungen für Differentialgleichungssysteme ähnlichen Typs angegeben. Die Methoden jedoch, die dort zur Anwendung kommen, sind für praktische Belange zu umständlich.

Andererseits lässt sich die Entwicklung im Ursprung nicht vermeiden, da daselbst Randbedingungen ($\varphi(0) < \infty$) vorgegeben werden müssen. Auch wenn man die Funktionen durch analytische Fortsetzung immer näher zur kritischen Stelle heran berechnen kann, so erhält man jedoch immer schlechter konvergierende Reihen.

7.5. Grundgedanken beim Suchen der Lösung bei $r = 0$

Das Aufsuchen der Lösung wird von der physikalisch anschaulichen Vorstellung geleitet, dass man wohl zunächst die Lösung aufsuchen könnte für den Fall, dass der Flug der Neutronen im Vakuum stattfindet (Streaming). Die allgemeine Lösung wird darauf derart angesetzt, dass im Spezialfall des Vakuums eben die gefundene spezielle Lösung wieder herauskommt.

Es gelingt dann besser, die Singularitäten der Lösung wahrzunehmen und eine Methode aufzubauen, um systematisch wie im Falle der Lie-Reihen rekursive algebraische Algorithmen aufzubauen, welche die analytische Lösung des Problems darstellen. Zunächst wird ein einfaches Beispiel behandelt, das dann explizit durchdiskutiert wird.

Man muss nur Sorge tragen, dass alle spezifischen Schwierigkeiten, welche die allgemeine S_N -Lösung zeigt, auch im Beispiel vorhanden sind. Das einfachste, welches diesen Anforderungen genügt, ist dasjenige des S_4 -Systems. Dieses wird den nun folgenden Ausführungen zugrunde gelegt. Zur Herleitung der Lösung werden nur Eigenschaften der reellen Funktionen benötigt. Die Beschränkung auf die S_4 -Gleichungen wird dann nachträglich hinfällig, so dass dann in einem weiteren Kapitel die allgemeine Lösung der S_N -Gleichungen explizite hingeschrieben werden kann.

8. Die Vakuumgleichungen und deren Lösung

Der einfachste Spezialfall des S_N -Systems tritt ein, wenn die zu untersuchende Zone eine leere ist, das heisst, wenn alle materialabhängigen Grössen sowie die Quellen der Neutronen verschwinden. Das sehr einfache Differentialgleichungssystem, welches zurückbleibt, ist von der Form

$$\begin{aligned} -\phi'_{1\ell} &= 0 \quad \ell = 1, 2, \dots, M \\ \alpha_{j+1} \phi'_{j+1\ell} + \beta_{j+1} \phi'_{j\ell} + \frac{\gamma_{j+1}}{r} (\phi_{j+1\ell} - \phi_{j\ell}) &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, 2N \end{aligned}$$

Es werden zunächst die Grössen

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \quad k_{j+1} = -\gamma_{j+1}/\alpha_{j+1} \\ j &= 1, 2, \dots, 2N \end{aligned}$$

definiert und ein Lösungsansatz von folgender Form versucht:

$$\begin{aligned} \phi_{1\ell} &= c_{11}^{\ell} \quad \ell = 1, 2, \dots, M \\ \phi_{j+1\ell} &= \sum_{i=1}^{j-1} c_{i,j+1}^{\ell} r^{k_i} \quad j = 1, 2, \dots, 2N. \end{aligned}$$

Dieser Ansatz führt in der Tat zu einer Lösung, falls für die Konstanten $c_{i,j}^{\ell}$ folgende Rekursion angesetzt wird:

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{\ell} &= -c_{i,j-1}^{\ell} \frac{\beta_{i,j} k_i - \gamma_i}{\alpha_{j,k_i} + \gamma_j} \quad \ell = 1, 2, \dots, M \\ j &= 2, 3, \dots, 2N+1, \quad i = 1, 2, \dots, j-1 \end{aligned}$$

Wie man leicht nachrechnen kann, ist dies immer möglich, da der Nenner dieser Relation nie verschwindet. Es lassen sich somit alle $c_{i,j}^{\ell}$ samt und sonders mit Hilfe der $c_{1,j}^{\ell}$ ausdrücken.

Die Konstanten $c_{1,j}^{\ell}$ $\ell = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, 2N+1$ sind die Integrationskonstanten der Lösung; sie sind durch die Anfangswerte, resp. die Randwerte des Problems völlig bestimmt.

Das Verhalten der Lösung im Ursprung $r = 0$ ist von der Art der Exponenten k_j abhängig. Soll an dieser Stelle eine endliche Lösung existieren, so muss man das Verschwinden gewisser Koef-

fizienten der allgemeinen Vakuumslösung fordern, nämlich derjenigen, für die

$$k_j < 0$$

wird. Es ist darum unerlässlich und es wird sich später noch als überaus nützlich erweisen, die Exponenten k_j näher zu untersuchen. Wie noch gezeigt werden wird, sind die Exponenten k_j $j > N+2$ alle negativ.

Die Vakuumslösung einer leeren zylindersymmetrischen Zone um den Ursprung lässt daher dann und nur dann eine endliche Lösung zu, falls $c_j \equiv 0$ ist für alle $j > N+2$.

Diese Lösung besitzt die Eigenschaft der Symmetrie $\varphi_j = \varphi_{2N-j+2}$ für alle r der innersten Zone. Dies sind auch gerade die Randbedingungen, welche man bei $r = 0$ üblicherweise zu erfüllen hat.

8.1. Die Exponenten der Vakuumslösung

Man sieht sofort ein, dass die Koeffizienten α_{j+1} , β_{j+1} , γ_{j+1} folgenden Symmetriebedingungen genügen:

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1} &= -\beta_{2N-j+2} \\ \beta_{j+1} &= -\alpha_{2N-j+2} \\ \gamma_{j+1} &= +\gamma_{2N-j+2} \quad j = 1, 2, \dots, 2N \quad ,\end{aligned}$$

da nämlich gilt

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1} &= (-3N+3j-1)/6N \\ \beta_{j+1} &= (-3N+3j-2)/6N \\ \gamma_{j+1} &= [3N^2-1-3(-N+j)(-N+j-1)]/3N \quad ,\end{aligned}$$

also ist zum Beispiel

$$\begin{aligned}\beta_{2N-j+2} &= [-3N+3(2N-j+1)-2]/6N = (3N-3j+1)/6N = -(-3N+3j-1)/6N = \\ &= -\alpha_{j+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{2N-j+2} &= [3N^2-1-3(-N+2N-j+1)(-N+2N-j+1-1)]/3N = \\ &= [3N^2-1-3(N-j+1)(N-j)]/3N = \gamma_{j+1} .\end{aligned}$$

Wegen dieser Symmetriebedingungen ist es möglich, alle Exponenten der Vakuumslösung aus

$$k_{j+1}\alpha_{j+1} + \gamma_{j+1} = 0$$

zu erhalten.

Da α_j für $j > N+1$ positiv ist, folgt, dass alle k_{j+1} $j > N+1$ negativ werden, da γ_{j+1} stets positiv ist. Im Falle einer Vakuumzone sind daher um den Ursprung herum lediglich die $M \cdot (N+1)$ Integrationskonstanten c_{jj}^ℓ $j = 1, 2, \dots, N+1$; $\ell = 1, 2, \dots, M$ aus den Rand- oder Anfangsbedingungen zu bestimmen. Der grösste ganzzahlige Exponent ist $k_{N+1} = 2(3N^2-1)$. Nachstehend sind zur Illustration die Exponenten k_{j+1} für die Fälle S_2 bis S_{20} aufgeführt.

9. Die Lösung der S_4 -Gleichungen

Das Differentialgleichungssystem ist

$$\begin{aligned}
 -\varphi_1' &= \sum_{k=1}^5 k a_{1k} \varphi_k + S_1 \\
 -\frac{1}{3} \varphi_2' - \frac{5}{12} \varphi_1' + \frac{5}{6} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{2k} \varphi_k + S_2 \\
 -\frac{1}{12} \varphi_3' - \frac{1}{6} \varphi_2' + \frac{11}{6} \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{3k} \varphi_k + S_3 \\
 \frac{1}{6} \varphi_4' + \frac{1}{12} \varphi_3' + \frac{11}{6} \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{4k} \varphi_k + S_4 \\
 \frac{5}{12} \varphi_5' + \frac{1}{3} \varphi_4' + \frac{5}{6} \frac{\varphi_5 - \varphi_4}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{5k} \varphi_k + S_5
 \end{aligned} \tag{1}$$

Wie man weiss, charakterisieren die singulären Punkte einer Differentialgleichung auch die Singularitäten der Lösungen. Hieraus sieht man aus (1), dass es ausser für $r = 0$ immer möglich sein wird, die Lösungen in konvergente Potenzreihen anzugeben. Die Lösung der S_4 -Gleichungen gliedert sich demnach in zwei Hauptabschnitte, die Ermittlung der Entwicklung der Lösung ausserhalb des Ursprungs und im Ursprung selbst. Die Entwicklung an der Stelle $r_0 \neq 0$ erfolgt mit Lie-Reihen. Das formale Vorgehen für $r_0 = 0$ wird im Versuch bestehen, aus bekannten Lösungen für einfache Fälle die allgemeine Lösung aufzubauen. Man geht vom System aus, bei dem die rechte Seite von (1) identisch verschwindet. Diese Lösungen werden als Vakuumlösungen bezeichnet, da physikalisch gesehen das Nullsetzen der rechten Seiten dem Flug von Teilchen im Vakuum korrespondiert.

9.1. Die Vakuumslösungen

Mit den Werten

$$\alpha_1 = -1 \quad \beta_1 = 0 \quad \gamma_1 = 0$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3} \quad \beta_2 = -\frac{5}{12} \quad \gamma_2 = \frac{5}{6}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{12} \quad \beta_3 = -\frac{1}{6} \quad \gamma_3 = \frac{11}{6}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{6} \quad \beta_4 = \frac{1}{12} \quad \gamma_4 = \frac{11}{6}$$

$$\alpha_5 = \frac{5}{12} \quad \beta_5 = \frac{1}{3} \quad \gamma_5 = \frac{5}{6}$$

erhält man die fünf für die Fortsetzung der Theorie wesentlichen Exponenten

$$k_j = -\gamma_j/\alpha_j \quad j = 1, 2, \dots, 5$$

$$k_1 = 0 \quad k_2 = \frac{5}{2} \quad k_3 = 22 \quad k_4 = -11 \quad k_5 = -2 .$$

Die Lösung ist von der Form

$$\phi_j^{\text{vac}} = \sum_{l=1}^j c_{lj} r^{k_l} \quad j = 1, 2, \dots, 5 ,$$

wobei die Rekursion der c_{lj} das Auftreten von fünf Integrationskonstanten c_j gewährleistet, d.h. die Möglichkeit der Anpassung an vorgegebene Anfangswerte. Aus

$$c_{lj} = -c_{l,j-1} \frac{\beta_j k_l - \gamma_j}{\alpha_j k_l + \gamma_j} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, j-1 \\ j = 2, 3, \dots, 5 \end{array}$$

folgt daher

$$c_{12} = c_{11}$$

$$c_{13} = c_{11} \quad c_{23} = \frac{18}{13} c_{22}$$

$$c_{14} = c_{11} \quad c_{24} = c_{22} \quad c_{34} = 0$$

$$c_{15} = c_{11} \quad c_{25} = 0 \quad c_{35} = 0 \quad c_{45} = -\frac{6}{5} c_{44}$$

und somit die Vakuumslösung

$$\varphi_1^{\text{vac}} = c_{11}$$

$$\varphi_2^{\text{vac}} = c_{11} + c_{22} r^{5/2}$$

$$\varphi_3^{\text{vac}} = c_{11} + \frac{18}{13} c_{22} r^{5/2} + c_{33} r^{22} \quad (2)$$

$$\varphi_4^{\text{vac}} = c_{11} + c_{22} r^{5/2} + c_{44} r^{-11}$$

$$\varphi_5^{\text{vac}} = c_{11} - \frac{6}{5} c_{44} r^{-11} + c_{55} r^{-2}$$

9.2. Die Vakuumlösungen im Ursprung entwickelt

Aus physikalischen Gründen muss verlangt werden, dass

$$\varphi_j^{\text{vac}} < \infty \quad (3)$$

bleibt, was erfordert, dass $c_{44} = c_{55} \equiv 0$ ist. Dies hat zur Folge, dass diese zwei Konstanten durch die für alle r gültigen Beziehungen zu ersetzen sind,

$$\varphi_1^{\text{vac}} = \varphi_5^{\text{vac}} \quad \varphi_2^{\text{vac}} = \varphi_4^{\text{vac}} .$$

Diese Aussage deckt sich mit dem physikalischen Befund, dass wegen der Rotationssymmetrie und dem Fehlen einer Wechselwirkung die Teilchenzahlen für die verschiedenen Einfallsrichtungen denjenigen für die entsprechenden Austrittsrichtungen gleich sind.

Die Vakuumlösung, bei $r = 0$ entwickelt, zeigt also, dass nur noch drei freie Integrationskonstanten auftreten, die durch drei vorgebbare Randwerte für die Eintrittsrichtungen charakterisiert sind. Die Vakuumlösung zeigt ferner, dass die bei $r = 0$ endliche Lösung nicht beliebig oft differenzierbar ist (da $\lim[r^{5/2}]^{(n)} = \pm \infty$ für $n > 2$ ist). Will man daher die allgemeine Lösung diskutieren, so muss man die Form der Singularitäten kennen, wenn man die Aufgabe auf die Ermittlung von beliebig oft differenzierbaren Funktionen zurückführen will. Zwar kennt man die Form der singulären Lösung im allgemeinen Falle nicht, aber diese Unkenntnis kann zunächst behoben wer-

den durch die Annahme, dass die Form der Singularitäten im Vakuum dieselben sein sollen wie im allgemeinen Falle. Als Begründung dieser Annahme führt man an, dass im Grenzfall wieder die singuläre Vakuumlösung herauskommen muss.

9.3. Die allgemeine Lösung im Ursprung entwickelt

Wie schon bei (2) ersichtlich war, werden alle Lösungen durch diejenigen Exponenten charakterisiert, die nicht negativ sind. Im Vakuumsfalle aber existierten lediglich ein regulärer und ein singulärer Lösungstyp. Auch mit dieser verallgemeinerten Lösung ist es nicht möglich, im Grenzfalle Vakuum dieselbe Lösung zu erhalten, da wegen den singulären Rekursionen die eine Integrationskonstante Null gesetzt werden muss und deshalb die im Abschnitt 7.4 angeführten Gründe weiterhin bestehen. Die allgemeine Lösung sollte daher wegen des Auftretens von drei positiven Exponenten eine weitere singuläre Lösung enthalten. Sie muss daher um eine singuläre Lösung derart erweitert werden, dass beim Grenzfalle Vakuum die letztere identisch verschwindet. Da aber der Bereich der irrationalen Singularitäten bereits erschöpft ist, bleibt als weitere Singularität eine logarithmische offen. Der Lösungsansatz für die allgemeine Lösung wird daher in folgender Form versucht,

$$\varphi_j = f_j + g_j r^{5/2} + h_j \ln r \quad j = 1, 2, \dots, 5 \quad (4)$$

wobei f_j , g_j und h_j nun beliebig oft differenzierbar sein sollen. Das System von fünf simultanen Differentialgleichungen von (1) zerfällt daher in 15 simultane Differentialgleichungen, falls die Aufspaltung aller singulären Ansätze der Bedingung (3) nicht widerspricht, die teilweise gekoppelt sind und folgende Gestalt aufweisen:

$$\begin{aligned}
-h'_1 &= \sum_{k=1}^5 k a_{1k} h_k + S_{31} \\
-\frac{1}{3} h'_2 - \frac{5}{12} h'_1 + \frac{5}{6} \frac{h_2-h_1}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{2k} h_k + S_{32} \\
-\frac{1}{12} h'_3 - \frac{1}{6} h'_2 + \frac{11}{6} \frac{h_3-h_2}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{3k} h_k + S_{33} \quad (5) \\
\frac{1}{6} h'_4 + \frac{1}{12} h'_3 + \frac{11}{6} \frac{h_4-h_3}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{4k} h_k + S_{34} \\
\frac{5}{12} h'_5 + \frac{1}{3} h'_4 + \frac{5}{6} \frac{h_5-h_4}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{5k} h_k + S_{35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-g'_1 - \frac{5}{2} \frac{g_1}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{1k} g_k + S_{21} \\
-\frac{1}{3} g'_2 - \frac{5}{12} g'_1 - \frac{15}{8} \frac{g_1}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{2k} g_k + S_{22} \\
-\frac{1}{12} g'_3 - \frac{1}{6} g'_2 + \frac{13}{8} \frac{g_3}{r} - \frac{9}{4} \frac{g_2}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{3k} g_k + S_{23} \quad (6) \\
\frac{1}{6} g'_4 + \frac{1}{12} g'_3 + \frac{9}{4} \frac{g_4}{r} - \frac{13}{8} \frac{g_3}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{4k} g_k + S_{24} \\
\frac{5}{12} g'_5 + \frac{1}{3} g'_4 + \frac{15}{8} \frac{g_5}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{5k} g_k + S_{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f'_1 - \frac{h_1}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{1k} f_k + S_{11} \\
-\frac{1}{3} f'_2 - \frac{5}{12} f'_1 - \frac{1}{3} \frac{h_2}{r} - \frac{5}{12} \frac{h_1}{r} + \frac{5}{6} \frac{f_2-f_1}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{2k} f_k + S_{12} \\
-\frac{1}{12} f'_3 - \frac{1}{6} f'_2 - \frac{1}{12} \frac{h_3}{r} - \frac{1}{6} \frac{h_2}{r} + \frac{11}{6} \frac{f_3-f_2}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{3k} f_k + S_{13} \quad (7) \\
\frac{1}{6} f'_4 + \frac{1}{12} f'_3 + \frac{1}{6} \frac{h_4}{r} + \frac{1}{12} \frac{h_3}{r} + \frac{11}{6} \frac{f_4-f_3}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{4k} f_k + S_{14} \\
\frac{5}{12} f'_5 + \frac{1}{3} f'_4 + \frac{5}{12} \frac{h_5}{r} + \frac{1}{3} \frac{h_4}{r} + \frac{5}{6} \frac{f_5-f_4}{r} &= \sum_{k=1}^5 k a_{5k} f_k + S_{15}
\end{aligned}$$

Hierbei sind die Funktionen S_{1j} , S_{2j} , S_{3j} jeweils die (beliebig oft differenzierbaren) Anteile der Quelle S , die wie die Lösung aufspaltbar gedacht werden. Ist S eine externe Quelle, so wird man sie sich immer als beliebig oft differenzierbare Funktion vorstellen können. Ist aber S im Multi-
gruppenformalismus durch die Beiträge aus andern Energiegruppen zusammengesetzt, so kann man sich in jeder Gruppe eine S_4 -Diskretisierung denken, womit die Aufspaltung gerechtfertigt ist (da genau dieselben Typen von Singularitäten wieder auftreten). Die Voraussetzungen bei (4) werden nun verwendet, um Differentialrekursionen herzustellen, so dass also Ableitungen beliebig hoher Ordnung sich berechnen lassen. Nach vorangegangener Multiplikation der (5), (6) und (7) mit r und n -maliger Differentiation erhält man, wenn man berücksichtigt, dass gilt,

$$[ry(r)]^{(n)} = ry^{(n)} + ny^{(n-1)} ,$$

$$\begin{aligned}
 & -h_1^{(n+1)} \\
 & = \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{lk} h_k^{(n)} + S_{31}^{(n)} \\
 & - \frac{1}{3} rh_2^{(n+1)} - \frac{n}{3} h_2^{(n)} - \frac{5}{12} rh_1^{(n+1)} - \frac{5}{12} nh_1^{(n)} + \frac{5}{6} (h_2^{(n)} - h_1^{(n)}) = r \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{2lk} h_k^{(n)} + n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{2lk} h_k^{(n-1)} + rS_{32}^{(n)} + nS_{32}^{(n-1)} \\
 & - \frac{1}{12} rh_3^{(n+1)} - \frac{n}{12} h_3^{(n)} - \frac{1}{6} rh_2^{(n+1)} - \frac{1}{6} nh_2^{(n)} + \frac{11}{6} (h_3^{(n)} - h_2^{(n)}) = r \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{3lk} h_k^{(n)} + n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{3lk} h_k^{(n-1)} + rS_{33}^{(n)} + nS_{33}^{(n-1)} \\
 & \frac{1}{6} rh_4^{(n+1)} + \frac{n}{6} h_4^{(n)} + \frac{1}{12} rh_3^{(n+1)} + \frac{1}{12} nh_3^{(n)} + \frac{11}{6} (h_4^{(n)} - h_3^{(n)}) = r \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{4lk} h_k^{(n)} + n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{4lk} h_k^{(n-1)} + rS_{34}^{(n)} + nS_{34}^{(n-1)} \\
 & \frac{5}{12} rh_5^{(n+1)} + \frac{5}{12} nh_5^{(n)} + \frac{1}{3} rh_4^{(n+1)} + \frac{1}{3} nh_4^{(n)} + \frac{5}{6} (h_5^{(n)} - h_4^{(n)}) = r \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{5lk} h_k^{(n)} + n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{5lk} h_k^{(n-1)} + rS_{35}^{(n)} + nS_{35}^{(n-1)}
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 & -rg_1^{(n+1)} \\
 & - \frac{5}{2} g_1^{(n)} = r \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{1lk} g_k^{(n)} + n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{1lk} g_k^{(n-1)} + rS_{21}^{(n)} + nS_{21}^{(n-1)} \\
 & - \frac{15}{8} g_1^{(n)} = r \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{2lk} g_k^{(n)} + n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{2lk} g_k^{(n-1)} + rS_{22}^{(n)} + nS_{22}^{(n-1)} \\
 & - \frac{1}{12} rg_3^{(n-1)} - \frac{n}{12} g_3^{(n)} - \frac{1}{6} rg_2^{(n+1)} - \frac{1}{6} ng_2^{(n)} + \frac{13}{8} g_3^{(n)} - \frac{9}{4} g_2^{(n)} = r \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{3lk} g_k^{(n)} + n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{3lk} g_k^{(n-1)} + rS_{23}^{(n)} + nS_{23}^{(n-1)} \\
 & \frac{1}{6} rg_4^{(n+1)} + \frac{n}{6} g_4^{(n)} + \frac{1}{12} rg_3^{(n+1)} + \frac{1}{12} ng_3^{(n)} + \frac{9}{4} g_4^{(n)} - \frac{13}{8} g_3^{(n)} = r \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{4lk} g_k^{(n)} + n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{4lk} g_k^{(n-1)} + rS_{24}^{(n)} + nS_{24}^{(n-1)} \\
 & \frac{5}{12} rg_5^{(n+1)} + \frac{5}{12} ng_5^{(n)} + \frac{1}{3} rg_4^{(n+1)} + \frac{1}{3} ng_4^{(n)} + \frac{15}{8} g_5^{(n)} = r \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{5lk} g_k^{(n)} + n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^k a_{5lk} g_k^{(n-1)} + rS_{25}^{(n)} + nS_{25}^{(n-1)}
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
& -r f_1^{(n+1)} - n f_1^{(n)} - h_1^{(n)} = r \sum_1^5 k a_{1k} f_k^{(n)} + n \sum_1^5 a_{1k} f_k^{(n-1)} + r S_{11}^{(n)} + n S_{11}^{(n-1)} \\
& - \frac{1}{3} r f_2^{(n+1)} - \frac{n}{3} f_2^{(n)} - \frac{5}{12} r f_1^{(n+1)} - \frac{5}{12} n f_1^{(n)} + \frac{5}{6} (f_2^{(n)} - f_1^{(n)}) - \frac{1}{3} h_2^{(n)} - \frac{5}{12} h_1^{(n)} = \\
& \quad r \sum_1^5 k a_{2k} f_k^{(n)} + n \sum_1^5 a_{2k} f_k^{(n-1)} + r S_{12}^{(n)} + n S_{12}^{(n-1)} \\
& - \frac{1}{12} r f_3^{(n+1)} - \frac{n}{12} f_3^{(n)} - \frac{1}{6} r f_2^{(n+1)} - \frac{1}{6} f_2^{(n)} + \frac{11}{6} (f_3^{(n)} - f_2^{(n)}) - \frac{1}{12} h_3^{(n)} - \frac{1}{6} h_2^{(n)} = \\
& \quad r \sum_1^5 k a_{3k} f_k^{(n)} + n \sum_1^5 a_{3k} f_k^{(n-1)} + r S_{13}^{(n)} + n S_{13}^{(n-1)} \\
& \frac{1}{6} r f_4^{(n+1)} + \frac{n}{6} f_4^{(n)} + \frac{1}{12} r f_3^{(n+1)} + \frac{n}{12} f_3^{(n)} + \frac{11}{6} (f_4^{(n)} - f_3^{(n)}) + \frac{1}{6} h_4^{(n)} + \frac{1}{12} h_3^{(n)} = \\
& \quad r \sum_1^5 k a_{4k} f_k^{(n)} + n \sum_1^5 a_{4k} f_k^{(n-1)} + r S_{14}^{(n)} + n S_{14}^{(n-1)} \\
& \frac{5}{12} r f_5^{(n+1)} + \frac{5}{12} n f_5^{(n)} + \frac{1}{3} r f_4^{(n+1)} + \frac{n}{3} f_4^{(n)} + \frac{5}{6} (f_5^{(n)} - f_4^{(n)}) + \frac{5}{12} h_5^{(n)} + \frac{1}{3} h_4^{(n)} = \\
& \quad r \sum_1^5 k a_{5k} f_k^{(n)} + n \sum_1^5 a_{5k} f_k^{(n-1)} + r S_{15}^{(n)} + n S_{15}^{(n-1)}
\end{aligned}$$

(10)

Die Entwicklung der Lösung im Ursprung findet man durch Nullsetzen von r im System (8), (9), (10). Dies ist möglich, da auch für $r = 0$ die Funktionen als beliebig oft differenzierbar vorausgesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 -h_1^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^5 k a_{1k} h_k^{(n)} + S_{31}^{(n)} \\
 -\frac{2n-5}{6} h_2^{(n)} - \frac{5}{12} (n+2) h_1^{(n)} &= n \sum_{k=1}^5 k a_{2k} h_k^{(n-1)} + n S_{32}^{(n-1)} \\
 -\frac{n-22}{12} h_3^{(n)} - \frac{n+11}{6} h_2^{(n)} &= n \sum_{k=1}^5 k a_{3k} h_k^{(n-1)} + n S_{33}^{(n-1)} \\
 \frac{n+11}{6} h_4^{(n)} + \frac{n-22}{12} h_3^{(n)} &= n \sum_{k=1}^5 k a_{4k} h_k^{(n-1)} + n S_{34}^{(n-1)} \\
 \frac{5}{12} (n+2) h_5^{(n)} + \frac{2n-5}{6} h_4^{(n)} &= n \sum_{k=1}^5 k a_{5k} h_k^{(n-1)} + n S_{35}^{(n-1)}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{2n+5}{2} g_1^{(n)} &= n \sum_{k=1}^5 k a_{1k} g_k^{(n-1)} + n S_{21}^{(n-1)} \\
 -\frac{n}{3} g_2^{(n)} - \frac{5}{24} (2n+9) g_1^{(n)} &= n \sum_{k=1}^5 k a_{2k} g_k^{(n-1)} + n S_{22}^{(n-1)} \\
 -\frac{2n-39}{24} g_3^{(n)} - \frac{2n+27}{12} g_2^{(n)} &= n \sum_{k=1}^5 k a_{3k} g_k^{(n-1)} + n S_{23}^{(n-1)} \\
 \frac{2n+27}{12} g_4^{(n)} + \frac{2n-39}{24} g_3^{(n)} &= n \sum_{k=1}^5 k a_{4k} g_k^{(n-1)} + n S_{24}^{(n-1)} \\
 \frac{5}{24} (2n+9) g_5^{(n)} + \frac{n}{3} g_4^{(n)} &= n \sum_{k=1}^5 k a_{5k} g_k^{(n-1)} + n S_{25}^{(n-1)}
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
-nf_1^{(n)} & - h_1^{(n)} = n \sum_{k=1}^5 a_{1k} f_k^{(n-1)} + nS_{11}^{(n-1)} \\
- \frac{2n-5}{6} f_2^{(n)} - \frac{5}{12} (n+2)f_1^{(n)} - \frac{1}{3} h_2^{(n)} - \frac{5}{12} h_1^{(n)} & = n \sum_{k=1}^5 a_{2k} f_k^{(n-1)} + nS_{12}^{(n-1)} \\
- \frac{n-22}{12} f_3^{(n)} - \frac{n+11}{6} f_2^{(n)} - \frac{1}{12} h_3^{(n)} - \frac{1}{6} h_2^{(n)} & = n \sum_{k=1}^5 a_{3k} f_k^{(n-1)} + nS_{13}^{(n-1)} \quad (13) \\
\frac{n+11}{6} f_4^{(n)} + \frac{n-22}{12} f_3^{(n)} + \frac{1}{6} h_4^{(n)} + \frac{1}{12} h_3^{(n)} & = n \sum_{k=1}^5 a_{4k} f_k^{(n-1)} + nS_{14}^{(n-1)} \\
\frac{5}{12}(n+2)f_5^{(n)} + \frac{2n-5}{6} f_4^{(n)} + \frac{5}{12} h_5^{(n)} + \frac{1}{3} h_4^{(n)} & = n \sum_{k=1}^5 a_{5k} f_k^{(n-1)} + nS_{15}^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Diese Rekursionen sind alle für $n = 0, 1, \dots$ gültig. Schon die Relationen für $n = 0$ lassen wesentliche Merkmale der Lösung in Erscheinung treten. Zunächst folgt aus (11), dass immer gilt

$$h_2^{(0)} = h_1^{(0)} \quad h_3^{(0)} = h_2^{(0)} \quad h_4^{(0)} = h_3^{(0)} \quad h_5^{(0)} = h_4^{(0)},$$

also lediglich die Kenntnis von $h_1^{(0)}$ vorausgesetzt wird. Aus (12) folgt weiter, dass $g_1^{(0)} = 0$, $g_2^{(0)} = c_{22}$, $g_3^{(0)} = \frac{18}{13}c_{22}$, $g_4^{(0)} = c_{22}$, $g_5^{(0)} = 0$ ist. Für $g_2^{(0)}$ ist die (unbestimmbare) Konstante c_{22} eingesetzt worden.

Aus (13) folgt zuerst das Verschwinden von $h_1^{(0)}$, also $h_1^{(0)} = 0$ (wegen der Funktion $\ln r$, welche für $r = 0$ unendlich wird, hätte man sonst schon ohnehin keine endliche Lösung erhalten, was mit (3) ja gefordert wurde). Deshalb verschwinden auch alle Werte $h_2^{(0)}$, $h_3^{(0)}$, $h_4^{(0)}$, $h_5^{(0)}$. Man erhält daher ebenfalls $f_2^{(0)} = f_1^{(0)}$, $f_3^{(0)} = f_2^{(0)}$, $f_4^{(0)} = f_3^{(0)}$, $f_5^{(0)} = f_4^{(0)}$, also sind, wenn man $f_1^{(0)} = c_{11}$ setzt, die aus der Endlichkeit der Lösung (siehe (3)) hervorgehenden Symmetriebedingungen erfüllt, mehr noch, es folgt (da $\lim_{r \rightarrow 0} [r^n \ln r] = 0$ aus der Entwicklung von $h_j(r) \ln r$ ebenfalls nach Null strebt), dass im Ursprung die Lösung für alle Richtungen denselben Wert annimmt, also dasselbst Isotropie herrscht (diese Bedingung ist wegen den Festlegungen auf Seite 25 aus physikalischen Erwägungen heraus gleichfalls zu stellen und ist im Vakuumsfalle ebenfalls erfüllt). Erhöht man nun sukzessive n bis zum Wert 21, so lassen

sich alle Ableitungen durch solche niedrigerer Ordnung ausdrücken.

Für $n = 22$ wird aus (11) die eine Ableitung $h_3^{(22)}$ unbestimmbar, da deren Vorkoeffizient Null ist.

Die Beziehungen (12) zeigen dagegen keine solchen Unbestimmtheiten, da für alle $n > 0$ die Vorkoeffizienten stets endlich bleiben. Dieser Teil der Lösung hängt insbesondere nur von c_{22} ab. Diese Grösse ist also eine Integrationskonstante des Problems.

Die Beziehungen von (13) hingegen führen auf die Unbestimmtheit von $f_3^{(22)} = c_{33}$. Auch diese Grösse ist demnach Integrationskonstante des Problems. Die Sachlage ist jedoch anders für die Ableitung $h_3^{(22)}$. Diese ist bestimmt aus der Relation

$$\begin{aligned} -0 \cdot f_3^{(22)} - \frac{11}{2} f_3^{(22)} - \frac{1}{12} h_3^{(22)} - \frac{1}{6} \cdot 0 = \\ = 22 \sum_{k=1}^5 k a_{3k} f_k^{(21)} + 22 s_{13}^{(21)}, \end{aligned}$$

da alle vorkommenden Grössen bekannt sind ausser $h_3^{(22)}$, wenn die Quellverteilung und $f_1^{(0)}$ vorgegeben sind. Man muss daher $h_3^{(22)}$ durch diese Bedingungsgleichung festlegen.

Das S_4 -Problem, in der innersten Zone bei $r = 0$ entwickelt, lässt daher eine eindeutige Lösung unter den gestellten Bedingungen zu, wobei drei Integrationskonstanten c_{11} , c_{22} und c_{33} zugelassen werden. Wenn vorausgesetzt wird, dass die Entwicklungen von S konvergent sind, so sieht man, dass für wachsendes n die Reihenglieder im Konvergenzbereich der Reihe abnehmen.

Für ein gegebenes N sei M_N eine Majorante der durch (11), (12) und (13) definierten Ableitungen $y^{(N)}$. Für grosse N kann man eine obere Grenze angeben für den Faktor K , mit dem die Ableitungen $y^{(N)}$ multipliziert werden müssen, um $y^{(N+1)}$ rekursiv zu berechnen. Wenn man jetzt noch jeweils die Absolutbeträge einsetzt, so folgen die majorisierten Rekursionen

$$y^{(N+1)} = K \cdot M_N$$

$$y^{(N+2)} = K \cdot y^{(N+1)} = K^2 M_N \quad \text{u.s.w.}$$

Beim Abbrechen der Rekursionen bei $n = N$ begeht man daher höchstens einen Fehler R_N der Grössenordnung

$$R_N = \frac{M_N}{K^N} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(Kr)^n}{n!} .$$

Da aber M_{N+1} nur höchstens gleich $K \cdot M_N$ gewählt zu werden braucht, folgt daraus, wenn man $A_N = M_N / K^N$ setzt,

$$R_{N+1} = A_N \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(Kr)^n}{n!} \quad R_N = A_N \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(Kr)^n}{n!} ,$$

so dass man daher mit wachsendem N den Rest R_N beliebig klein werden lassen kann. Man weiss ja, dass R_N konvergent ist, und so folgt aus der Relation $R_{N+1} < R_N$ die absolute Konvergenz der Lösungen.

9.4. Die allgemeine Lösung ausserhalb des Ursprungs entwickelt

Da ausserhalb des Ursprungs keine Singularitäten von (1) auftreten, kann man die Lösungen in Lie-Reihen entwickeln. Die Lösungen sind daselbst beliebig oft differenzierbar. Die zugehörigen Rekursionen sind daher diejenigen von (8), wobei man lediglich h_j durch φ_j und r durch r_0 (die Entwicklungsstelle) ersetzen muss. Die fünf Werte von $\varphi_j^{(0)}$ müssen vorgegeben werden. Dann sind alle höheren Ableitungen rekursiv berechenbar. Die Entwicklungen von r_0 sind selber konvergent. Man kann für genügend grosses $n = N$ und falls die Entwicklung von S ebenfalls konvergiert, eine Majorante von $\varphi^{(N)} = M_N$ angeben. Die höheren Ableitungen sind dann durch folgende majorisierte Rekursionen gegeben:

$$\varphi^{(N+1)} = K \frac{M_N^{(N+1)}}{r_0} = \frac{N+1}{\rho} M_N \quad \varphi^{(N+2)} = \frac{(N+1)(N+2)}{\rho^2} M_N \quad \text{u.s.w.,}$$

wobei

$$\rho = \frac{r_0}{K}$$

gesetzt wurde. Das Restglied ist dann sicher kleiner als oder höchstens gleich

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{M_N}{N!} h^N + \frac{M_N(N+1)}{(N+1)!\rho} h^{N+1} + \frac{M_N(N+1)(N+2)}{(N+2)!\rho^2} h^{N+2} + \dots = \\ &= \frac{M_N}{N!} h^N \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h}{\rho} \right)^n = \frac{M_N h^N}{N! \left(1 - \frac{h}{\rho}\right)}. \end{aligned}$$

Da jetzt weiter gilt

$$\begin{aligned} M_{N+1} &= M_N \frac{N+1}{\rho} \\ R_{N+1} &= \frac{M_{N+1} h^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h}{\rho} \right)^n = \frac{M_{N+1} h^{N+1}}{(N+1)! \left(1 - \frac{h}{\rho}\right)}, \end{aligned}$$

so erhält man

$$R_{N+1} = \frac{M_N}{N!} \frac{h}{\rho} \frac{h^N}{1 - \frac{h}{\rho}} = R_N \frac{h}{\rho},$$

so sieht man, dass das Restglied R_N für $h < \rho$ konvergiert und dass dann gilt $R_{N+1} < R_N$, womit die Konvergenz der Entwicklung für die Lösung mindestens im Konvergenzbereich ρ gesichert ist. Man kann leicht zeigen, dass der Konvergenzradius $\rho = r_0$ wird.

10. Die Lösung der S_N -Differentialgleichungen an der Stelle $r=0$

Das System

$$A(j)\varphi'_{j\ell} + B(j)\varphi'_{j-1\ell} + \frac{C(j)}{r} [\varphi_{j\ell} - \varphi_{j-1\ell}] =$$

$$= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{2N+1} a_{j\ell}^{km} \varphi_{km} + S_{j\ell} \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, 2N+1 \\ \ell = 1, 2, \dots, M \end{array}$$

wird durch den Ansatz

$$\varphi_{i\ell} = \sum_{l=1}^{N+1} \psi_{ilj\ell} r^{R(i)} [\ln r]^{MO(i)} \quad (1)$$

gelöst. Dieser Ansatz muss in dieser Form angenommen werden, wie sich bei den S_4 -Differentialgleichungen zeigte. Die Erweiterung auf S_N verläuft sinngemäss, wobei auch klar ist, dass alle $MO(i)$ ganzzahlig sein müssen. Im S_4 -Falle musste $MO(2) = 1$ gewählt werden, um mit Hilfe fremder Termelemente eine Singularität der Rekursionen, welche durch ganzzahlige Vakuumsexponenten bedingt waren, zu beheben ($\ln r$ ergibt beim Differenzieren einen $\frac{1}{r}$ -Term in den Differentialgleichungen). Es ist daher für alle S_N -Systeme notwendig, für den ersten ganzzahligen Exponenten $R(i)$ das entsprechende $MO(i) = 1$ zu setzen.

Wie vorzugehen ist, wenn eben mehrere ganzzahlige $R(i)$ auftreten, wird anhand der Erfahrung beim S_4 -System erkannt. Jedesmal, wenn ein solcher ganzzahliger Exponent in der Rekursion auftritt, gibt es ein n ganz, das die Unbestimmtheit eines Reihenterms erfordert. Widersprüche können nur vermieden werden dadurch, dass von analogen logarithmischen Gliedern Termbeiträge erscheinen; da aber der logarithmische Ansatz schon benutzt wurde, bleibt als weiterer Ausweg, für diese singulären Rekursionen einen Ansatz in monoton steigende ganzzahlige Potenzen des Logarithmus zu versuchen (nur so erhält man dann in einer singulären Rekursion einen Beitrag,

der aus der Differentiation von $[\ln r]^m$ resultiert). Die Koeffizienten $MO(i)$ sind daher durch die Vorschrift gegeben, dass $MO(i)$ Null ist, wenn $R(i)$ nicht ganz ist oder Null, und dass $MO(i)$ diejenigen $R(i)$ durchnummeriert, für welche $R(i)$ ganzzahlig ist.

Beim Differenzieren von (1) entsteht ein mit $[\ln r]^{MO(i)}$ und ein weiterer, mit $[\ln r]^{MO(i)-1}$ multiplizierter Anteil.

Fasst man immer gleich hohe Potenzen von $[\ln r]^{MO(i)}$ zusammen und ordnet man die Ableitung von (1) entsprechend um, so folgt

$$\varphi'_{j\ell} = \sum_{l=1}^{N+1} \left\{ \psi'_{l j \ell} + \frac{R(i)}{r} \psi_{l j \ell} + \frac{M_4(i)}{r} r^{M_3(i)} \psi_{M_2(i) j \ell} \right\} r^{R(i)} [\ln r]^{MO(i)}$$

$$j = 1, 2, \dots, 2N+1$$

$$\ell = 1, 2, \dots, M$$
(2)

Für die Koeffizienten $A(j)$, $B(j)$, $C(j)$, $R(i)$, $MO(i)$, $M_1(i)$, $M_2(i)$, $M_3(i)$, $M_4(i)$ ist im Anhang V die ausführliche Berechnungsmethode wiedergegeben.

Aus der Beziehung

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^n [f(r)g(r)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

erhält man, wenn noch die Relation

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^k [r^m] = \begin{cases} \frac{m!}{(m-k)!} r^{m-k} & m \geq k \\ 0 & m < k \end{cases}$$

verwendet wird, eine Formel für den Ausdruck

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^k [r^m f(r)] = \sum_{k=0}^n \frac{n! m!}{k! (n-k)! (m-k)!} r^{m-k} f^{(n-k)}.$$

Führt man $\lim r = 0$ darin aus, so erhält man einen für die Fortsetzung wichtigen Ausdruck

$$[r^m f(r)]_{r=0}^{(n)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!} f^{(n-m)}(0) & n \geq m \\ 0 & n < m \end{cases} \quad (3)$$

Man erhält durch Einsetzen in das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ A(j) \left[\psi'_{i j \ell} + \frac{R(i)}{r} \psi_{i j \ell} + \frac{M_4(i)}{r} r^{M_3(i)} \psi_{M_2(i) j \ell} \right] + \right. \\
 & \quad + B(j) \left[\psi'_{i j-1 \ell} + \frac{R(i)}{r} \psi_{i j-1 \ell} + \frac{M_4(i)}{r} r^{M_3(i)} \psi_{M_2(i) j-1 \ell} \right] + \\
 & \quad \left. + \frac{C(j)}{r} [\psi_{i j \ell} - \psi_{i j-1 \ell}] \right\} r^{R(i)} [l n r]^{M_0(i)} = \\
 & = \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{2N+1} a_{j \ell}^{k m} \psi_{i k m} + S_{i j \ell} \right\} r^{R(i)} [l n r]^{M_0(i)}
 \end{aligned}$$

ein neues System

$$\begin{aligned}
 & A(j) \left[\psi'_{i j \ell} + \frac{R(i)}{r} \psi_{i j \ell} + \frac{M_4(i)}{r} r^{M_3(i)} \psi_{M_2(i) j \ell} \right] + \\
 & + B(j) \left[\psi'_{i j-1 \ell} + \frac{R(i)}{r} \psi_{i j-1 \ell} + \frac{M_4(i)}{r} r^{M_3(i)} \psi_{M_2(i) j-1 \ell} \right] + \\
 & + \frac{C(j)}{r} [\psi_{i j \ell} - \psi_{i j-1 \ell}] = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{2N+1} a_{j \ell}^{k m} \psi_{i k m} + S_{i j \ell} \\
 & i = 1, 2, \dots, N+1 \\
 & j = 1, 2, \dots, 2N+1 \\
 & \ell = 1, 2, \dots, M
 \end{aligned}$$

Wenn nun dieses System mit r multipliziert und n -mal nach differenziert wird, so erhält man nach Ausführen des Grenzprozesses $\lim r = 0$ ein Schema von Differentialrekursionen mit den Hilfsbeziehungen (3)

$$\begin{aligned}
 & M_{i j n} \psi_{i j \ell}^{(n)} + N_{i j n} \psi_{i j-1 \ell}^{(n)} + P_{i j n} \psi_{M_2(i) j \ell}^{(n-M_3[i])} + Q_{i j n} \psi_{M_2(i) j-1 \ell}^{(n-M_3[i])} = \\
 & = \left[\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{2N+1} a_{j \ell}^{k m} \psi_{i k m}^{(n-1)} + S_{i j \ell}^{(n-1)} \right] \\
 & j = 1, 2, \dots, 2N+1 \\
 & \ell = 1, 2, \dots, M \\
 & n = 0, 1, 2, \dots \\
 & i = 1, 2, \dots, N+1
 \end{aligned}$$

Hierbei sind die Abkürzungen

$$M_{ljn} = A(j)[n+R(i)] + C(j)$$

$$N_{ljn} = B(j)[n+R(i)] - C(j)$$

$$P_{ljn} = A(j)M_{4(i)} \frac{n!}{[n-M_3(i)]!}$$

$$Q_{ljn} = B(j)M_{4(i)} \frac{n!}{[n-M_3(i)]!}$$

gemacht worden.

In diesen Rekursionen ist für jedes $\psi_{lj\ell}^{(n)}$, für das ein Index $i, j, \ell < 1$ wird oder $n < 0$, der Wert Null einzusetzen.

Zur konkreten Lösungsangabe muss ein Vektor von Integrationskonstanten

$$e_{j\ell} \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, N+1 \\ \ell = 1, 2, \dots, M \end{matrix}$$

bekannt sein. Beim Start mit $n = 0$ setzt man dann jedesmal, wenn $M_{lj0} = 0$ wird, das entsprechende $\psi_{lj\ell}^{(0)} = e_{j\ell}$. Die Rekursionen werden immer nach $\psi_{lj\ell}^{(n)}$ aufgelöst, ausser in den Fällen, wo M_{ljn} Null wird.

Dann wird aber nach $\psi_{M_2(i)j\ell}^{(n-M_3[i])}$ aufgelöst und $\psi_{lj\ell}^{(n)} = e_{M_2(i)\ell}$ gesetzt.

Dies wird jedesmal der Fall sein, wenn $n = M_3(i)$ wird und zugleich $j = M_2(i)$ ist. Dann ist gewährleistet, dass P_{ljn} von Null verschieden ist.

10.1. Vorgehen zur Lösung eines S_N -Problems

Zur praktischen Lösung der S_N -Differentialgleichungen gibt man sich $(N+1) \cdot M$ linear unabhängige Vektoren $e_{j\ell}^m$ $i = 1, 2, \dots, N+1$, $\ell = 1, 2, \dots, M$ vor und bestimmt so jedesmal eine Lösung

$$\varphi_{j\ell}^m(r_0) = \sum_{i=1}^{N+1} r_0^{R(i)} [\ln r_0]^{M_0(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{n!} \psi_{lj\ell}^m n$$

$$\begin{matrix} k = 1, 2, \dots, N+1 & m = 1, 2, \dots, M \\ j = 1, 2, \dots, 2N+1 & \ell = 1, 2, \dots, M \end{matrix}$$

Bezeichnet man ausserdem die Lösung, welche man mit dem Nullvektor erhält, mit $\phi_{j\ell}^{00}(r_0)$, so kann man, falls Quellen $S_{j\ell}$ vorhanden sind (was wir immer annehmen wollen), ebenfalls eine nichttriviale Lösung erhalten.

Wenn man nun die so erhaltenen Lösungen $\phi_{j\ell}^{km}(r_0)$ mit Hilfe von Lie-Reihen analytisch fortsetzt, so kann man die Lösung am Rande $r = R$ angeben,

$$\phi_{j\ell}^{km}(R) \quad \begin{array}{ll} k = 1, 2, \dots, N+1 & m = 1, 2, \dots, M \\ j = 1, 2, \dots, 2N+1 & \ell = 1, 2, \dots, M \end{array}$$

Die Lösung, welche daselbst die Randbedingung

$$\phi_{j\ell}(R) = \alpha \phi_{2N-j+2\ell}(R)$$

erfüllt, ist dann wegen der Linearität des Differentialgleichungssystems eine Linearkombination aus den $\phi_{j\ell}^{km}(R)$

$$\phi_{j\ell}(R) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N+1} \phi_{j\ell}^{km}(R) C_{km} + \phi_{j\ell}^{00}(R).$$

α ist im Falle der Vakuumsrandbedingung Null und im Falle der Reflexionsrandbedingung eins.

Die Randbedingung bei $r = 0$ liefert also für die $(N+1) \cdot M$ Unbekannten lediglich $N \cdot M$ lineare Gleichungen. Man erhält M zusätzliche lineare Gleichungen durch folgende Ueberlegung:

Setzt man in der Boltzmann-Gleichung

$$\sqrt{1-\eta^2} \left[\mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right] + \sigma \phi = Q$$

$\mu = 0$ und $r = R$, so erhält man

$$\sqrt{1-\eta^2} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right)_{\substack{\mu=0 \\ r=R}} + \sigma \phi = Q.$$

Man kann zeigen, dass stets $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right)_{\substack{\mu=0 \\ r=R}} = 0$ ist.

Wenn $\alpha = 0$ ist, so gilt ohnehin $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)_{r=R} = 0$ für $\mu < 0$, da $\varphi(\mu, R) = 0$, $\mu < 0$ ist.

Man zählt dann einfach den Punkt $\mu = 0$ zum offenen Gebiet $\mu < 0$. Beim Diskretisieren ist die Ableitung bei $\mu = 0$ ohnehin unstetig. Man definiert lediglich den Wert der Ableitung an dieser Stelle auf sinnvolle Weise. Wenn $\alpha = 1$ ist, so gilt

$$\varphi(\mu, R) = \varphi(-\mu, R) \quad \mu < 0.$$

Man ersieht, dass $\varphi(\mu, R)$ eine gerade Funktion von μ ist und deshalb, falls φ in eine Potenzreihe um $\mu = 0$ entwickelt wird, nur gerade Potenzen auftreten. Dies garantiert aber das Verschwinden von

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)_{\substack{\mu=0 \\ r=R}}.$$

Man erhält somit eine sehr einfache Zusatzbedingung $\sigma \varphi = Q$ für alle η .

Schreibt man diese Bedingungen für den Fall des diskretisierten Problems um, so erhält man zunächst eine Gleichung für $\ell = 1$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N+1} a_{N+1,1}^{km} \varphi_{km} + S_{N+1,1}$$

und $M-1$ weitere Gleichungen, da immer

$$\varphi_{N+1,\ell} = \varphi_{N+1,1} \quad \ell = 2, 3, \dots, M$$

erfüllt sein muss. Dies sind also die M zusätzlichen linearen Gleichungen für die Unbekannten c_{km} .

Die Koeffizienten derjenigen Linearkombination c_{km} , welche die Randbedingungen bei $r = R$ erfüllt, lassen sich berechnen aus folgendem linearem Gleichungssystem:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N+1} [\varphi_{j\ell}^{km}(R) - \alpha \varphi_{2N-j+2\ell}^{km}(R)] c_{km} + [\varphi_{j\ell}^{oo}(R) - \alpha \varphi_{2N-j+2\ell}^{oo}(R)] = 0$$

$$\sum_{\ell=1}^M \sum_{j=1}^{2N+1} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N+1} a_{N+1\ell}^{jl} [\varphi_{ji}^{km}(R) c_{km} + \varphi_{ji}^{oo}(R)] + S_{N+1\ell} = 0$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N+1} [\varphi_{N+1\ell}^{km}(R) - \varphi_{N+1\ell}^{km}(R)] c_{km} + [\varphi_{N+1\ell}^{oo}(R) - \varphi_{N+1\ell}^{oo}(R)] = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, N \quad \ell = 1, 2, \dots, M$$

Die Matrixelemente sind

$$A_{km}^{j\ell} = \varphi_{j\ell}^{km}(R) - \varphi_{2N-j+2\ell}^{km}(R) \quad b^{j\ell} = \varphi_{j\ell}^{oo}(R) - \varphi_{2N-j+2\ell}^{oo}(R)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$\ell = 1, 2, \dots, M$$

$$A_{km}^{N+1\ell} = \sum_{\ell=1}^M \sum_{j=1}^{2N+1} a_{N+1\ell}^{jl} \varphi_{j\ell}^m(R) \quad b^{N+1\ell} = \sum_{\ell=1}^M \sum_{j=1}^{2N+1} a_{N+1\ell}^{jl} \varphi_{j\ell}^{oo}(R) + S_{N+1\ell}$$

$$A_{km}^{N+1\ell} = \varphi_{N+1\ell}^{km}(R) - \varphi_{N+1\ell}^{km}(R) \quad b^{N+1\ell} = \varphi_{N+1\ell}^{oo} - \varphi_{N+1\ell}^{oo}$$

das Gleichungssystem dagegen

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N+1} A_{km}^{j\ell} c_{km} + b^{j\ell} = 0 \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, N+1 \\ \ell = 1, 2, \dots, M \end{matrix}$$

Sind einmal die c_{km} bekannt, so ist die endgültige Lösung gegeben durch

$$\varphi_{j\ell}(r) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N+1} c_{km} \varphi_{j\ell}^{km}(r) + \varphi_{j\ell}^{oo}(r)$$

10.2. Konvergenzverhalten der Lösung

Es ist leicht, aus der schon bewiesenen Konvergenz der S_4 -Lösung dasjenige der S_N -Lösung zu finden, da der Beweis völlig analog vor sich geht.

Man findet, dass jedenfalls der Konvergenzradius der Lie-Reihenentwicklung um r_0 den Radius $\rho = r_0$ hat (bis zur singulären Stelle). Die Entwicklung um die singuläre Stelle $r = 0$ ist beständig konvergent ($\rho = \infty$). Für praktische Belange ist es jedoch besser, die Lösung jeweils analytisch fortzusetzen, sobald sich bei der Berechnung ein gewisser Stellenschwund bemerkbar macht [5].

11. Schlussbetrachtungen

In der vorliegenden Arbeit ist es gelungen, eine analytische Lösung der S_N -Differentialgleichungen zu finden für den Fall einer zylindersymmetrischen Anordnung (der Fall einer ebenen Anordnung ist darin als Spezialfall enthalten). Es sind insbesondere folgende Probleme eingehend behandelt worden:

1. Explizite Lösung der S_N -Differentialgleichungen im Vakuum
2. Lösung der S_N -Differentialgleichungen durch Lie-Reihen an einer Entwicklungsstelle $r_0 \neq 0$
3. Lösung der S_4 -Differentialgleichungen an der singulären Entwicklungsstelle $r_0 = 0$ mit speziellen Reihen
4. Lösung der S_4 -Differentialgleichungen an der Stelle $r_0 \neq 0$ mit Hilfe von Lie-Reihen
5. Konvergenzbeweis der Lösung von 3. und 4.
6. Lösung der S_N -Differentialgleichungen an der singulären Entwicklungsstelle $r_0 = 0$ mit Hilfe von speziellen Reihen-Rekursionen
7. Detaillierte Angabe des Vorgehens bei der Lösung eines konkreten Randwertproblems

Es sind somit die grundlegenden Arbeiten durchgeführt worden, welche die vollständige analytische Lösung der S_N -Differentialgleichungen ermöglichen.

Diese analytischen Lösungen haben gegenüber den herkömmlichen S_N -Lösungen den Vorteil der Genauigkeit, welche (wegen 5.) unabhängig vom Rechenverfahren selber von aussen beliebig vorgegeben werden kann. Darüber hinaus sind die analytischen Lösungen so entwickelt worden, dass im Falle langsamer Konvergenz (etwa wie e^x) oder im Falle numerischer Instabilität (Stellenschwund) auch schon die Möglichkeit der analytischen Fortsetzung gegeben ist.

Dadurch, dass ein umfangreiches Maschennetz von räumlichen Gitterpunkten vermieden wird, ist es möglich, im Gegensatz zu vollnumerischen S_N -Rechnungen die Energieabhängigkeit der

Neutronenverteilung besser als bisher zu erfassen. Dies ist für manche reaktorphysikalische Untersuchungen von grosser Wichtigkeit, da es bis jetzt nicht möglich war, detaillierte und räumliche Neutronenspektren mit Hilfe der Transportgleichung in differentieller Formulierung zu erhalten. Jetzt sind neben der analytischen S_N -Lösung solche für die Multigruppen- P_N -Formulierung entwickelt worden [6], [8].

Es ist im Hinblick auf die elektronische Verarbeitung des Problems überaus wichtig, auf die Tatsache hinzuweisen, dass die Anzahl Operationen, welche für die analytische Berechnung erforderlich ist, annähernd dieselbe bleibt wie bei einer entsprechenden vollnumerischen Berechnung. Dadurch aber, dass eine drastische Speicherplatzersparnis möglich ist, wird der zeitliche Aufwand im selben Verhältnis verkürzt wie der Speicherbedarf.

Eine Verallgemeinerung der analytischen Methode auf mehrdimensionale Probleme (beispielsweise $r-\vartheta$ oder $r-z$ Geometrie) scheint durchaus möglich zu sein und erscheint sowohl vom theoretischen wie vom praktischen Aspekt aus als äusserst wünschenswert.

ANHANG I

Relationen zwischen Streuung im Labor- und Schwerpunktsystem

Die Relationen, welche den Uebergang vom Labor- ins Schwerpunktsystem und umgekehrt gestatten, sind in [50] eingehend besprochen.

Es sei $\mu = \cos\vartheta$, $\mu_0 = \cos\vartheta_0$ der Kosinus des Streuwinkels eines Neutrons, das mit einem A-fach schweren Kern, der sich in Ruhe befand, kollidierte, im Laborsystem und im Schwerpunktsystem. Wenn v, v' die Geschwindigkeit des Neutrons im Laborsystem nach, bzw. vor dem Stoss bedeutet, so findet man

$$v = v' \frac{\mu + \sqrt{A^2 - (1 - \mu^2)}}{A + 1} .$$

Der Uebergang vom Laborsystem ins Schwerpunktsystem ist durch

$$\mu_0 = \mu \sqrt{1 - \frac{1 - \mu^2}{A^2}} - \frac{1 - \mu^2}{A}$$

gegeben. Umgekehrt gilt natürlich auch

$$\mu = \frac{\mu_0 + \frac{1}{A}}{\sqrt{1 + \frac{2\mu_0}{A} + \frac{1}{A^2}}} .$$

Es seien $f(\mu)$ und $f_0(\mu_0)$ die Wahrscheinlichkeitsdichten der Streuung von Neutronen im Labor- und Schwerpunktsystem. Wegen der Erhaltung der Teilchen gilt immer $f(\mu)d\mu = f_0(\mu_0)d\mu_0$.

Beim Uebergang von einem der beiden Systeme auf das andere muss man daher $\frac{d\mu_0}{d\mu}$ oder $\frac{d\mu}{d\mu_0}$ kennen,

Nach einigen Rechnungen findet man

$$\frac{d\mu_0}{d\mu} = \sqrt{1 - \frac{1 - \mu^2}{A^2}} + \frac{2\mu}{A} + \frac{\mu^2}{A^2} / \sqrt{1 - \frac{1 - \mu^2}{A^2}}$$

$$f(\mu) = f_0(\mu_0) \frac{d\mu_0}{d\mu} ,$$

$$\frac{d\mu}{d\mu_0} = \frac{1 + \frac{\mu_0}{A}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2\mu_0}{A} + \frac{1}{A^2}\right)^3}}$$

$$f_0(\mu_0) = f(\mu) \frac{d\mu}{d\mu_0} \quad .$$

ANHANG II

Entwicklung des elastischen Transferterms

Es ist üblich, den elastischen Streuterm in Kugelfunktionen zu entwickeln,

$$N\sigma_S^e(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \sum_l N s_l P_l(\mu), \quad \text{wobei } \mu = \vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}$$

gesetzt wird und $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}'$ Einheitsvektoren sind, welche parallel den Geschwindigkeiten des einfallenden und austretenden Neutrons sind.

Die Energie E des gestreuten Neutrons der Anfangsenergie E' ist eindeutig bestimmt durch den Streukosinus μ_0 im Schwerpunktsystem,

$$\mu_0 = 1 - \frac{(A+1)^2}{2A} \left(1 - \frac{E}{E'}\right), \quad A = \text{Massenverhältnis Targetteilchen zu Neutronenmasse}$$

Der elastische Streuterm nimmt daher folgende Form an:

$$N\sigma_S^e(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} N\sigma_S^e(E') \frac{d\mu_0}{d\mu} \delta\left[E - E' + \frac{2AE'}{(A+1)^2} (1 - \mu_0)\right] f(\mu_0).$$

$f(\mu_0)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Streuung um einen Richtungskosinus μ_0 im Schwerpunktsystem.

$f(\mu_0)$ wird ebenfalls in Kugelfunktionen entwickelt,

$$f(\mu_0) = \sum_v \frac{2v+1}{4\pi} P_v(\mu_0) f_v,$$

wobei als Entwicklungskoeffizienten die

$$f_v = 2\pi \int_{-1}^{-1} f(\mu_0) P_v(\mu_0) d\mu_0$$

gegeben sind.

Die Entwicklungskoeffizienten s_l werden hiermit zu

$$N s_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{-1} N\sigma_S^e(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) P_l(\mu) d\mu.$$

Führt man die Integration aus für die zwei ersten Momente s_0 und s_1 , so erhält man, falls auch nur $f(\mu_0)$ bis zu den Gliedern $f_0 = 1$, f_1 entwickelt wird, die beiden Ausdrücke

$$\sigma_{s_0}^{\ell}(E' \rightarrow E) = \frac{\sigma_s^e(E')}{(1-\alpha)E'} \left[1 + 3f_1 \left(1 - \frac{2}{1-\alpha} \left\{ 1 - \frac{E}{E'} \right\} \right) \right] \quad \alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$$

$$\sigma_{s_1}^e(E' \rightarrow E) = \frac{3\sigma_s^e(E')(A+1)^2}{8A (EE')^{1/2}} \left[(A+1) \frac{E}{E'} - (A-1) \right] \left[1 + 3f_1 \left(1 - \frac{2}{1-\alpha} \left\{ 1 - \frac{E}{E'} \right\} \right) \right]$$

Der elastische Transferwirkungsquerschnitt ist in dieser Näherung

$$N\sigma_s^e(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = N\sigma_{s_0}^e(E' \rightarrow E) + 3N\sigma_{s_1}^e(E' \rightarrow E) \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'$$

Berechnung des elastischen Transferwirkungsquerschnittes

Die verschiedenen Momente des Transferwirkungsquerschnittes berechnen sich aus

$$N\sigma_{s_\ell}^e(i \rightarrow j) = \int_{E_j}^{E_{j-1}} dE \int_{E_i}^{E_{i-1}} N\sigma_{s_\ell}^e(E' \rightarrow E) g(E') dE' \quad \ell = 0, 1.$$

Dabei ist

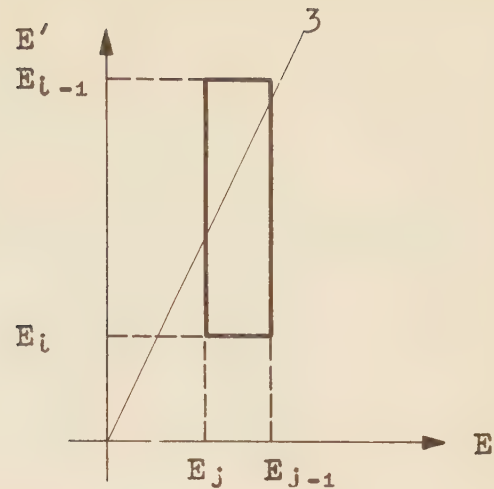
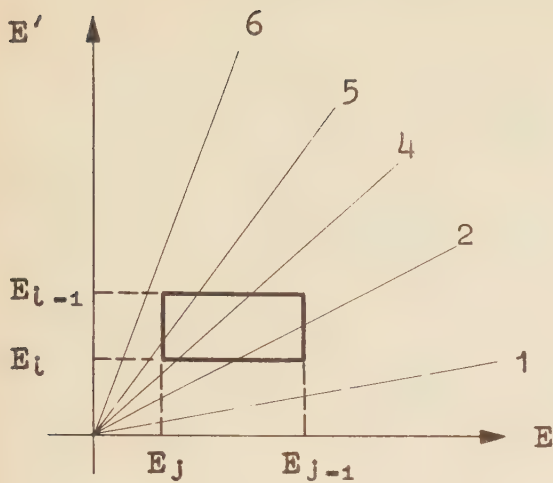
$$\begin{aligned} \sigma_{s_\ell}^e &= 4\pi s_\ell & \text{wenn } E' &\leq E/\alpha \\ &= 0 & \text{wenn } E' &> E/\alpha \end{aligned} \quad \alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$$

s_ℓ sind die Momente des elastischen Streuwirkungsquerschnittes

$$\sigma_s^e(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \sum_{\ell} s_\ell P_\ell(\mu) \quad \text{wobei } \mu = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'$$

die Geschwindigkeits-Einheitsvektoren des einfallenden und gestreuten Neutrons darstellen.

Die Methode zur Bestimmung der Integrationsgrenzen ist etwas kompliziert und führt auf folgende sechs Fälle,



die davon herrühren, dass die Gerade $E' = E/\alpha$ den Transferbereich auf sechs mögliche Arten schneiden kann. Wenn man annimmt, dass

$$g(E') = \frac{1}{E' \Delta u} \quad u' = \ln \frac{E_0}{E'}$$

$$\Delta u = u_{i-1} - u_i = \ln \frac{E_i}{E_{i-1}}$$

gilt, kann man unter der Voraussetzung, dass $\sigma_s^e(E') = \sigma_s$ konstant bleibt, und nur zwei Momente der anisotropen Streuung im Schwerpunktsystem zu berücksichtigen sind, die Integration der beiden Transferkoeffizienten $\sigma_{s0}^e(i \rightarrow j)$ und $\sigma_{s1}^e(i \rightarrow j)$ durchführen. Man erhält:

1. Fall $\sigma_{s0}^e(i \rightarrow j)$

1.1. 0

$$1.2. \quad \frac{\sigma_s}{\Delta u(1-\alpha)} \left\{ \left[\frac{E_{i-1}}{E_i} - \alpha - \alpha \ln \frac{E_{i-1}}{\alpha E_i} \right] \beta + \right. \\ \left. + \frac{f_1}{1-\alpha} \left[\frac{3}{2} \frac{E_{i-1}^2}{E_j^2} - \frac{3}{2} \alpha^2 - 3\alpha^2 \ln \frac{E_{i-1}}{\alpha E_i} \right] \right\} \\ \beta = \left[1 + 3f_1 \left(1 - \frac{2}{1-\alpha} \right) \right]$$

$$1.3. \quad \frac{\sigma_s}{\Delta u(1-\alpha)} \left\{ \left[\frac{E_{i-1}}{E_i} - \frac{E_i}{E_j} - \alpha \ln \frac{E_{i-1}}{E_j} \right] \beta + \right. \\ \left. + \frac{f_1}{1-\alpha} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{E_{i-1}^2}{E_i^2} - \frac{E_i^2}{E_j^2} \right) - 3\alpha^2 \ln \frac{E_{i-1}}{E_j} \right] \right\}$$

$$1.4. \quad \frac{\sigma_s}{\Delta u(1-\alpha)} \left\{ \left[\frac{E_{i-1}}{E_i} - \frac{E_{i-1}}{E_{i-1}} - \alpha \ln \frac{E_{i-1}}{E_i} \right] \beta + \right. \\ \left. + \frac{f_1}{1-\alpha} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{E_{i-1}^2}{E_i^2} - \frac{E_{i-1}^2}{E_{i-1}^2} \right) - 3\alpha^2 \ln \frac{E_{i-1}}{E_i} \right] \right\}$$

$$1.5. \quad \frac{\sigma_s}{\Delta u(1-\alpha)} \left\{ \left[(E_{j-1} - E_j) \left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_{i-1}} \right) - \alpha \ln \frac{\alpha E_{i-1}}{E_j} + \alpha - \frac{E_i}{E_{i-1}} \right] \beta + \right. \\ \left. + \frac{f_1}{1-\alpha} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_i^2} - \frac{1}{E_{i-1}^2} \right) (E_{j-1} - E_j) - 3\alpha^2 \ln \frac{\alpha E_{i-1}}{E_j} + \frac{3}{2} \left(\alpha^2 - \frac{E_i^2}{E_{i-1}^2} \right) \right] \right\}$$

$$1.6. \quad \frac{\sigma_s}{\Delta u(1-\alpha)} \left\{ \left[(E_{j-1} - E_j) \left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_{i-1}} \right) \right] \beta + \right. \\ \left. + \frac{f_1}{1-\alpha} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_i^2} - \frac{1}{E_{i-1}^2} \right) (E_{j-1}^2 - E_j^2) \right] \right\}$$

2. Fall $\sigma_{s1}^e(i \rightarrow j)$

$$2.1. \quad 0$$

$$2.2. \quad \frac{3\sigma_s(A+1)^2}{8A \Delta u} \left[\frac{3}{2} (A+1) \left(\frac{2}{3} \frac{E_{i-1}^{3/2}}{E_i^{3/2}} - \frac{2}{3} \alpha^{3/2} - \alpha^{3/2} \ln \frac{E_{i-1}}{\alpha E_i} \right) - \right. \\ \left. - 2(A-1) \left(\alpha^{1/2} \ln \frac{E_{i-1}}{\alpha E_i} + 2 \frac{E_{i-1}^{1/2}}{E_i^{1/2}} - 2 \frac{E_i^{1/2}}{E_i^{1/2}} \right) \right] \beta + \\ + \frac{9}{4} \frac{\sigma_s(A+1)^2 f_1}{A(1-\alpha) \Delta u} \left\{ \frac{2}{5} (A+1) \left[\frac{2}{5} \left(\frac{E_{i-1}^{5/2}}{E_i^{5/2}} - \alpha^{5/2} \right) - \alpha^{5/2} \ln \frac{E_{i-1}}{\alpha E_i} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} (A-1) \left[\alpha^{3/2} \ln \frac{E_{i-1}}{\alpha E_i} - \frac{2}{3} \left(\frac{E_{i-1}^{3/2}}{E_i^{3/2}} - \alpha^{3/2} \right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
2.3. \quad & \frac{3\sigma_s(A+1)^2}{8A \Delta u} \left[\frac{2}{3} (A+1) \left(\frac{2}{3} \frac{E_{i-1}^{3/2}}{E_l^{3/2}} - \frac{2}{3} \frac{E_i^{3/2}}{E_l^{3/2}} - \alpha^{3/2} \ln \frac{E_{i-1}}{E_j} \right) - \right. \\
& - 2(A-1) \left(\alpha^{1/2} \ln \frac{E_{i-1}}{E_j} + 2 \frac{E_{i-1}^{1/2}}{E_l^{1/2}} - 2 \frac{E_i^{1/2}}{E_l^{1/2}} \right) \Big] \beta + \\
& + \frac{9}{4} \frac{\sigma_s(A+1)^2 f_1}{A(1-\alpha) \Delta u} \left\{ \frac{2}{5} (A+1) \left[\frac{2}{5} \left(\frac{E_{i-1}^{5/2}}{E_l^{5/2}} - \frac{E_i^{5/2}}{E_l^{5/2}} \right) - \alpha^{5/2} \ln \frac{E_{i-1}}{E_j} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} (A-1) \left[\alpha^{3/2} \ln \frac{E_{i-1}}{E_j} - \frac{2}{3} \left(\frac{E_{i-1}^{3/2}}{E_l^{3/2}} - \frac{E_i^{3/2}}{E_l^{3/2}} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.4. \quad & \frac{3\sigma_s(A+1)^2}{8A \Delta u} \left\{ (A+1) \left[\frac{4}{9} \left(\frac{E_{i-1}^{3/2}}{E_l^{3/2}} - \frac{E_{i-1}^{3/2}}{E_{l-1}^{3/2}} \right) - \frac{2}{3} \alpha^{3/2} \ln \frac{E_{i-1}}{E_l} \right] - \right. \\
& - 2(A-1) \left[2 \left(\frac{E_{i-1}^{1/2}}{E_l^{1/2}} - \frac{E_{i-1}^{1/2}}{E_{l-1}^{1/2}} \right) - \alpha^{1/2} \ln \frac{E_{i-1}}{E_l} \right] \Big\} \beta + \\
& + \frac{3\sigma_s(A+1)^2}{8A \Delta u} \left\{ 6f_1 \frac{A+1}{1-\alpha} \left[\frac{4}{25} \left(\frac{E_{i-1}^{5/2}}{E_l^{5/2}} - \frac{E_{i-1}^{5/2}}{E_{l-1}^{5/2}} \right) - \frac{2}{5} \alpha^{5/2} \ln \frac{E_{i-1}}{E_l} \right] - \right. \\
& \left. - 2f_1 \frac{A-1}{1-\alpha} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{E_{i-1}^{3/2}}{E_l^{3/2}} - \frac{E_{i-1}^{3/2}}{E_{l-1}^{3/2}} \right) - 2\alpha^{3/2} \ln \frac{E_{i-1}}{E_l} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.5. \quad & \frac{3\sigma_s(A+1)^2}{8A \Delta u} \left\{ (A+1) \left[\frac{4}{9} \left(\alpha^{3/2} \frac{E_{j-1}^{3/2}}{E_j^{3/2}} - \frac{E_j^{5/2}}{E_l^{5/2}} \right) - \alpha^{3/2} \ln \frac{\alpha E_{j-1}}{E_j} \right] - \right. \\
& - 2(A-1) \left[2 \left(\alpha^{1/2} \frac{E_{j-1}^{1/2}}{E_j^{1/2}} - \frac{E_l^{5/2}}{E_l^{5/2}} \right) + \alpha^{1/2} \ln \frac{\alpha E_{j-1}}{E_j} \right] \Big\} \beta + \\
& + \frac{9}{4} \frac{\sigma_s(A+1)^2 f_1}{A(1-\alpha) \Delta u} \left\{ \frac{2}{5} (A+1) \left[\frac{2}{5} \left(\alpha^{5/2} \frac{E_{j-1}^{5/2}}{E_l^{5/2}} - \frac{E_l^{5/2}}{E_l^{5/2}} \right) - \alpha^{5/2} \ln \frac{\alpha E_{j-1}}{E_j} \right] + \right. \\
& + \frac{2}{3} (A-1) \left[\alpha^{3/2} \ln \frac{\alpha E_{j-1}}{E_j} - \frac{2}{3} \left(\alpha^{3/2} \frac{E_{j-1}^{3/2}}{E_l^{3/2}} - \frac{E_l^{3/2}}{E_l^{3/2}} \right) \right] \Big\} + \\
& + \frac{3\sigma_s(A+1)^2}{8A \Delta u} \left[\frac{4}{9} (A+1) (E_{j-1}^{3/2} - \alpha^{3/2} E_{l-1}^{3/2}) (E_l^{-3/2} - E_{l-1}^{-3/2}) - \right. \\
& - 4(A-1) (\alpha^{1/2} E_{l-1}^{1/2} - E_{j-1}^{1/2}) (E_{l-1}^{-1/2} - E_l^{-1/2}) \Big] \beta + \\
& + \frac{9}{4} \frac{\sigma_s(A+1)^2 f_1}{A(1-\alpha) \Delta u} \left[\frac{4}{25} (A+1) (E_{j-1}^{5/2} - \alpha^{5/2} E_{l-1}^{5/2}) (E_l^{-5/2} - E_{l-1}^{-5/2}) - \right. \\
& - \frac{4}{9} (A-1) (E_{j-1}^{3/2} - \alpha^{3/2} E_{l-1}^{3/2}) (E_l^{-3/2} - E_{l-1}^{-3/2}) \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.6. \quad & \frac{3\sigma_s(A+1)^2}{8A \Delta u} \left[\frac{4}{9} (A+1) (E_{j-1}^{3/2} - E_j^{3/2}) (E_l^{-3/2} - E_{l-1}^{-3/2}) - \right. \\
& - 4(A-1) (E_j^{1/2} - E_{j-1}^{1/2}) (E_{l-1}^{-1/2} - E_l^{-1/2}) \Big] \beta + \\
& + \frac{9}{4} \frac{\sigma_s(A+1)^2 f_1}{A(1-\alpha) \Delta u} \left[\frac{4}{25} (A+1) (E_{j-1}^{5/2} - E_j^{5/2}) (E_l^{-5/2} - E_{l-1}^{-5/2}) - \right. \\
& - \frac{4}{9} (A-1) (E_{j-1}^{3/2} - E_j^{3/2}) (E_l^{-3/2} - E_{l-1}^{-3/2}) \Big]
\end{aligned}$$

ANHANG III

Berechnung der S_N -Quadraturkoeffizienten

Die Koeffizienten a_ℓ^0 und a_ℓ^1 , $\ell = 1, 2, \dots, M$, werden nach folgendem Verfahren bestimmt:

Bei vorgegebenem M ist

$$M \equiv M_0 \pmod{2}$$

$$a_{M+1}^0 = -1$$

$$a_M^0 = 2M$$

$$a_{M+1}^1 = 2$$

$$a_1^1 = 2(1+M_0)$$

$$j_\ell = M+1-\ell$$

$$a_{j_\ell}^0 = a_{j_{\ell-1}}^0 \frac{M+j_\ell}{\ell} \quad \ell = 2, 3, \dots, M+1$$

$$\ell \equiv (\ell_0 - M_0) \pmod{2}$$

$$\ell_0 \equiv \ell_1 \pmod{2}$$

$$a_\ell^1 = 4(2-\ell_1)$$

$$\ell = 2, 3, \dots, M$$

$$a_1^0 = -a_2^0 \frac{M+1}{a_M^0}$$

ANHANG IV

Die Gewichtungskoeffizienten zur Bestimmung von Φ und J

Sie sind durch die Vorschrift bestimmt, dass der Fluss ϕ linear im Integrationsintervall $\mu_j \leq \mu \leq \mu_{j+1}$ sein soll. Man erhält daher im Zylinderfall folgendes Verfahren:

Die Hilfsgrößen

$$c_j^1 = [\sqrt{1-\mu_{j+1}^2} - \sqrt{1-\mu_j^2}] / \Delta\mu$$

$$c_j^2 = [\arcsin \mu_{j+1} - \arcsin \mu_j] / \Delta\mu$$

$$\Delta\mu = \mu_{j+1} - \mu_j$$

sind zu bestimmen. Dann wird

$$q_j^1 = -(c_j^1 + \mu_j c_j^2)$$

$$q_j^2 = (c_j^1 + \mu_{j+1} c_j^2)$$

$$q_j^3 = \frac{1}{2} (\mu_{j+1} c_j^1 + \sqrt{1-\mu_j^2} c_j^2) \quad j = 1, 2, \dots, 2N$$

ANHANG V

Berechnung der Koeffizienten des S_N -Differentialgl.-Systems

Man setzt

$$\begin{aligned}
 N_0 &= 2N \\
 N_1 &= 3N^2 - 1 \\
 N_2 &= 6N \\
 N_3 &= N_0 + 2 \\
 N_4 &= N_0 + 1 \\
 N_5 &= N + 1 \\
 K(1) &= 0 \\
 M_0(1) &= 0 \\
 M_1(1) &= 1 \\
 A(1) &= -1 \\
 B(1) &= 0 \\
 C(1) &= 0 \\
 R(1) &= 0 \\
 K_0 &= 1
 \end{aligned}$$

dann ist für $j = 1, 2, \dots, N_0$ zu rechnen

$$\begin{aligned}
 J_0(j) &= -N + j \\
 J_1(j) &= J_0(j) - 1 \\
 J_2(j) &= 3J_0(j) - 1 \\
 J_3(j) &= 2(N_1 - 3J_0(j) \cdot J_1(j)) \\
 J_3(j) &= K(j+1) \{\text{mod } J_2(j)\}
 \end{aligned}$$

Falls $K(j+1)$ Null ist, so setzt man

$$\begin{aligned}
 M_0(j+1) &= K_0 \\
 M_1(j+1) &= K_0 + 1 \\
 K_0 &= M_1(j+1)
 \end{aligned}$$

sonst aber

$$M_0(j+1) = 0 \quad \text{und} \quad M_1(j+1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 R(j+1) &= J3(j) / J2(j) \\
 A(j+1) &= J2(j) / N2 \\
 B(N3-j) &= -A(j+1) \\
 C(j+1) &= -R(j+1) \cdot A(j+1)
 \end{aligned}$$

Für $k = 1, 2, \dots, N4$ bestimmt man, falls $M1(k)$ Null ist,

$$\begin{aligned}
 M2(k) &= 1 \\
 M3(k) &= 0 \\
 M4(k) &= 0
 \end{aligned}$$

sonst untersucht man, ob für $i = k, k+1, \dots, N4$ die Bedingung $i \leq N5$ erfüllt ist.

Wenn dies der Fall ist, so hat man weiter zu untersuchen, ob $M0(i) - M1(k)$ Null ist. Dann ist das Suchverfahren für k abzubrechen und man setzt

$$\begin{aligned}
 M2(k) &= i \\
 M3(k) &= R(i) - R(k) \\
 M4(k) &= M1(k)
 \end{aligned}$$

Ist $M0(i) - M1(k)$ nicht Null, so wird i um eins erhöht und weitergesucht.

Ist die Bedingung $i - N5 \leq 0$ verletzt, so verfährt man wie wenn $M1(k)$ Null ist und bricht das Suchverfahren für k ab.

Dies ist im wesentlichen der Algorithmus, der die unbekannten Koeffizienten liefert.

Die $A(j)$, $B(j)$, $C(j)$ und $R(j)$ sind mit α_j , β_j , γ_j und k_j der Ausführungen in andern Kapiteln identisch.

13. Literaturverzeichnis

- [1] Davison: Neutron Transport Theory (1957)
- [2] B.G. Carlson: Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-1599 (1953)
- [3] J. Mennig: Ueber eine Methode zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit Hilfe von Lie-Reihen (zur Publikation vorgesehen)
- [4] J. Mennig: Rekursive Berechnung des allgemeinen Terms von Lie-Reihen bei der Integration nichtlinearer Differentialgleichungen (zur Publikation vorgesehen)
- [5] J. Mennig: Ueber die Anwendung von Rekursionsformeln bei der Lie-Reihen-Methode. Acta Physics Austriaca, 19, 4 (1965)
- [6] J. Mennig, T. Auerbach: Application of Lie-Series to Reactor Theory. EACRP-L-72 (1966) (zur Publikation in NSE)
- [7] F. Cap, J. Mennig: Analytical Method for Determining n Group Neutron Fluxes in Cylindrical Shielding Problems Using Lie Series. Nukleonik 6, 3 (1964) 141-147
- [8] J. Mennig, H. Tschirky: Zur Lösung der Neutronentransportgleichung in P_3 -Näherung. ZAMP (eingegangen 12.1965)
- [9] R.E. Marshak: Phys. Rev. 71 (1947) 443
- [10] M. Verde, G.C. Wick: Phys. Rev. 71 (1947) 852
- [11] V. Kourganoff, I.W. Busbridge: Basic Methods in Transfer Problems, Oxford (1952) 101
- [12] W.R. Conkie: Polynomial Approximation in Neutron Transport Theory. NSE 6 (1959) 260

- [13] O. Aspelund: On a New Method for Solving the Boltzmann Equation in Neutron Transport Theory. PICG Geneva 16 (1958) 530
- [14] S. Yabushita: Tschebycheff Polynomial Approximation Method of the Neutron Transport Equation. J.Math.Phys. 2 (1961) 543
- [15] J. Mika, R. Zelazny: Polynomial Approximation in Neutron Transport Theory. Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Math. Astronom. Phys. 8 (1960) 59
- [16] G.C. Pomraning, M. Clark jr.: Orthogonal Polynomial Angular Expansion of the Boltzmann Equation. NSE 17 (1963) 8
- [17] E.H. Bareiss: A Survey and Classification of Transport Theory Calculation Techniques. PICG Geneva 16 (1958) 503
- [18] B.G. Carlson: Solution of the Transport Equation by S_N -Approximation. LA-1891 (1959)
- [19] B.G. Carlson: The DSN and TDC Neutron Transport Codes. LAMS-2346 (1960)
- [20] Flügge: Handbuch der Physik 38, 9-12
- [21] J.M. Blatt, V.F. Weisskopf: Theoretical Nuclear Physics
- [22] F.G. Houtermans, J. Bartz: Z.Phys. 44 (1943) 167
- [23] B.E. Watt: Phys.Rev. 87 (1952) 1037
- [24] M.V. Pasechnik: PICG Geneva 2 (1955) 3
- [25] Chapman, Cowling: The Mathematical Theory of Nonuniform Gases
- [26] D.J. Hugues, R.S. Carter: Neutron Cross Sections Angular Distribution. BNL-400 (1956)
- [27] G. Breit: Phys.Rev. 71 (1947) 215

- [28] E. Fermi: Ric.Sci. 7 (2) (1936) 13
- [29] E. Fermi: AECD-NP-2385 (1951)
- [30] G.I. Marchuk: Numerical Methods for Nuclear Reactor Calculations. New York, London (1959)
- [31] G.I. Bell et al.: LAMS-3079, Recent Progress in Transport Theory (1964) 23
- [32] R. Alpiar: The ALGAN-I Manual. EIR-Bericht Nr. 76 (1965)
- [33] H. Ritz: Zellenrechnung für einen heterogenen Reaktor nach der Dreigruppendiffusionstheorie. Nukleonik 1, 5 (1959) 175-182
- [34] O. Kalnaes, L. Massimo: A One Dimensional Analytical 6-Group Criticality Programme. DP-74 (Dragon Project Report) (1962)
- [35] W. Gröbner: Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. Verlag der Deutschen Wissenschaften, VEB (1960)
- [36] S. Lie: Theorie der Transformationsgruppen. B.G. Teubner, Leipzig (1888)
- [37] J.C. Mark: The Spherical Harmonic Method I. National Research Council of Canada, Atomic Energy Project, MT-92 (1944)
- [38] J.C. Mark: The Spherical Harmonic Method II. National Research Council of Canada. Atomic Energy Project, MT-97 (1945)
- [39] W. Gröbner: Ueber die Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungssystemen mit Randbedingungen. Monatsheft für Mathematik 2, 4 (1962) 148-151
- [40] H. Knapp: Ergebnisse einer Untersuchung über den Wert der Lie-Reihen-Theorie für numerische Rechnungen in der Himmelsmechanik, ZAMM (Sonderheft) 42 (1962) T25-T27

- [41] J. Salmon: Théorie cinétique des neutrons rapides. Presses universitaires de France (1961) 181-182
- [42] E.L. Ince: Differential Equations. London (1927)
- [43] K. Zumbrunn: Exakte und angenäherte Lösungen der Mehrgruppen-Transportgleichung in ebener Geometrie. EIR-Bericht Nr. 72 (1965)
- [44] R. Brogli: Einfluss der Resonanzstreuung auf das Neutronenspektrum. Interner EIR-Bericht TM-ST-52 (1964)
- [45] B. Alder: Methods in Computational Physics. Academic Press New York, London (1963) 1-42
- [46] G.C. Wick: Ueber ebene Diffusionsprobleme. Z.Phys. 121 (1943) 702
- [47] S. Chandrasekhar: Radiative Transfer. Oxford (1950)
- [48] A.N. Filatov: Anwendung der Lie-Reihen auf Probleme der nichtlinearen Mechanik. Kiev (1961)
- [49] G. Sarlos: Comportement dynamique non-linéaire du réacteur. Dissertation EPUL
- [50] L. Landau, E. Lifschitz: Mécanique. Editions de la paix Moscou
S. Glasstone, M.C. Edlund: The Elements of Nuclear Reactor Theory (1952)

14. Verdankungen

Mein herzlichster Dank geht an Herrn Prof. Dr. W. Winkler, der mir die Möglichkeit gegeben hat, die vorliegende Arbeit ausserhalb der Universität Bern im Eidg. Institut für Reaktorforschung, Würenlingen, durchzuführen.

Ebenfalls grosser Dank gebührt Herrn Dr. R.W. Meier, der die Voraussetzung für das Gelingen dieser Arbeit in der Physikabteilung des EIR geschaffen hat.

Ich möchte auch Herrn J. Mennig nicht vergessen, der die Lie-Reihen-Methode im Institut erfolgreich eingeführt und diese Arbeit angeregt hat. Er hat das Entstehen derselben mit Interesse verfolgt.

Ebenso möchte ich Herrn Dr. T. Auerbach für fruchtbare Diskussionen bestens danken.

Besonderer Dank gebührt auch Fräulein G. Baerlocher, die mit Geduld das schwierige Manuskript in Maschinenschrift verfasst hat.

Lebenslauf

Am 25. Juni 1939 wurde ich als Sohn des Beuchat Henry Joseph und der Rosa Agnès, geb. Jaquet, in Bern geboren. Von 1946 - 1950 absolvierte ich die Primarschule, anschliessend von 1950 - 1954 das Progymnasium. Ebenfalls in Bern besuchte ich hernach das Städtische Gymnasium, wo ich 1958 die Maturitätsprüfung Typus A bestand. Von 1958 bis 1966 studierte ich an der Universität Bern, wo ich 1963 den Titel eines Lizentiaten der Naturwissenschaften erlangte mit dem Hauptfach Physik und den Nebenfächern Mathematik und Astronomie. Nach einer halbjährigen Tätigkeit beim Eidg. Statistischen Amt in Bern, 1961/1962, bin ich nun seit 1962 im Eidg. Institut für Reaktorforschung in Würenlingen auf dem Gebiete der Neutronenphysik tätig.

